La conjecture locale de Gross-Prasad pour les groupes spéciaux orthogonaux: le cas général

Colette Moeglin, Jean-Loup Waldspurger

La conjecture locale de Gross-Prasad pour les groupes spéciaux orthogonaux : le cas général

C. Moeglin, J.-L. Waldspurger

31 décembre 2009

Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On appelle espace quadratique un couple (V,q) formé d'un espace vectoriel V sur F de dimension finie et d'une forme bilinéaire q sur V, symétrique et non dégénérée. Soient (V,q) et (V',q') deux espaces quadratiques. On note d et d' leurs dimensions et G et G' leurs groupes spéciaux orthogonaux. On suppose $d>d'$ et d et d' de parités distinctes. On suppose donnée une décomposition orthogonale de (V,q) en la somme de (V',q') et d'un espace quadratique qui est lui-même somme orthogonale de plans hyperboliques et d'une droite quadratique (D,q_D). Le groupe G' est alors un sous-groupe de G. On définit $\nu_0 \in F^\times/F^{\times,2}$ en fixant un élément non nul $v_0 \in D$ et en posant

$$\nu_0 = (-1)^d q_D(v_0,v_0)/2.$$

Soient σ, resp. σ', une représentation admissible irréductible de $G(F)$, resp. $G'(F)$. Gross et Prasad ont défini une multiplicité $m(\sigma,\sigma')$. Par exemple, dans le cas où $d=d'+1$, introduisons des espaces E_σ et $E_{\sigma'}$ dans lesquels se réalisent σ et σ'. Alors $m(\sigma,\sigma')$ est la dimension de l'espace complexe des applications linéaires $l: E_\sigma \to E_{\sigma'}$ telles que $l\circ\sigma(g') = \sigma'(g')\circ l$ pour tout $g' \in G'(F)$. La définition générale est rappelée en 1.2. D'après [AGRS] et [GGP] corollaire 15.2, on a toujours $m(\sigma,\sigma') \leq 1$.

Rappelons la classification conjecturale des représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ dans le cas d impair. Pour tout entier naturel pair N, on fixe une forme symplectique sur $\mathbb{C}^N$ et on note $Sp(N,\mathbb{C})$ son groupe symplectique. Notons W_F le groupe de Weil absolu de F et $W_{DF} = W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ le groupe de Weil-Deligne. Notons $\Phi(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $Sp(d-1,\mathbb{C})$ d'homomorphismes continus $\varphi : W_{DF} \to Sp(d-1,\mathbb{C})$ qui sont semi-simples et dont la restriction à $SL(2,\mathbb{C})$ est algébrique. On conjecture que l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles de $G(F)$ est union disjointe de L-paquets $\Pi^G(\varphi)$ indexés par les $\varphi \in \Phi(G)$. Cette classification se ramène à celle des représentations tempérées de la façon suivante. Considérons les données suivantes :

• un Lévi $\hat{L} = GL(d_1,\mathbb{C}) \times ... \times GL(d_t,\mathbb{C}) \times Sp(d_0-1,\mathbb{C})$ de $Sp(d-1,\mathbb{C})$;

• des homomorphismes $\varphi_0 : W_{DF} \to Sp(d_0-1,\mathbb{C})$ et $\varphi_j : W_{DF} \to GL(d_j,\mathbb{C})$ pour $j=1,...,t$, vérifiant les mêmes conditions que φ et qui sont tempérés, c'est-à-dire que les images de W_F par ces homomorphismes sont relativement compactes ;

• des réels $b_1 > b_2 > ... > b_t > 0$.

Notons $|.|_F$ la valeur absolue usuelle de $F^\times$, que l'on identifie par la théorie du corps de classes à un caractère de W_F, puis de W_{DF}. Introduisons l'homomorphisme

$$\varphi^{\hat{L}} = (\varphi_1 \otimes |.|_F^{b_1}) \otimes ... \otimes (\varphi_t \otimes |.|_F^{b_t}) \otimes \varphi_0$$

de W_{DF} dans $\hat{L}$. En le poussant par l'inclusion de $\hat{L}$ dans $Sp(d-1,\mathbb{C})$, il devient un élément de $\Phi(G)$. Inversement, soit $\varphi \in \Phi(G)$. Alors il existe des données comme ci-dessus, uniques à conjugaison près, de sorte que $\varphi = \varphi^{\hat{L}}$. Il peut ne correspondre à $\hat{L}$ aucun Lévi de G (c'est le cas si G n'est pas déployé et $d_0 = 1$). Dans ce cas, on pose $\Pi^G(\varphi) = \emptyset$ et, pour unifier les notations, $S(\varphi)/S(\varphi)^0 = \{1\}$, $\mathcal{E}^G(\varphi) = \emptyset$. Supposons qu'à $\hat{L}$ corresponde un Lévi L de G. On a

$$L = GL(d_1) \times ... \times GL(d_t) \times G_0,$$

où G_0 est un groupe de même type que G. Pour tout $j = 1, ..., t$, notons $\pi(\varphi_j)$ la représentation admissible irréductible de $GL(d_j, F)$ déterminée par φ_j par la correspondance de Langlands, prouvée par Harris-Taylor et Henniart. Admettons la conjecture pour les représentations tempérées. A φ_0 correspond un L-paquet $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$ de représentations tempérées de $G_0(F)$. Soit P le sous-groupe parabolique de G, de composante de Lévi L, pour lequel la suite $(b_1, ..., b_t)$ est positive dans un sens usuel. Pour $\sigma_0 \in \Pi^{G_0}(\varphi_0)$, notons σ le quotient de Langlands de la représentation induite

$$Ind_P^G((\pi(\varphi_1) \otimes |det|_F^{b_1}) \otimes ... \otimes (\pi(\varphi_t) \otimes |det|_F^{b_t}) \otimes \sigma_0),$$

c'est-à-dire son unique quotient irréductible. On note $\Pi^G(\varphi)$ l'ensemble de ces représentations σ quand σ_0 décrit $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$. Rappelons que le paquet $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$ est paramétré (conjecturalement) par un ensemble $\mathcal{E}^{G_0}(\varphi_0)$ de caractères d'un groupe $S(\varphi_0)/S(\varphi_0)^0$ isomorphe à un produit de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a rappelé ce paramétrage en [W1] 4.2, on le note $\epsilon \mapsto \sigma(\varphi_0, \epsilon)$. On pose $S(\varphi)/S(\varphi)^0 = S(\varphi_0)/S(\varphi_0)^0$, $\mathcal{E}^G(\varphi) = \mathcal{E}^{G_0}(\varphi_0)$ et, pour un élément $\epsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi)$, on note $\sigma(\varphi, \epsilon)$ la représentation déduite de $\sigma_0 = \sigma(\varphi_0, \epsilon)$.

Les représentations de $G(F)$ se paramètrent de façon similaire dans le cas où d est pair. Pour tout entier naturel N, on fixe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{C}^N$ et on note $O(N,\mathbb{C})$, resp. $SO(N,\mathbb{C})$, son groupe orthogonal, resp. spécial orthogonal. Considérons un homomorphisme $\varphi : W_{DF} \to O(N,\mathbb{C})$ vérifiant les mêmes conditions que précédemment. Par composition avec le déterminant, on obtient un caractère quadratique de W_{DF}, forcément trivial sur $SL(2,\mathbb{C})$, donc un caractère quadratique de W_F. Par la théorie du corps de classes, il détermine un élément $\delta(\varphi) \in F^\times/F^{\times,2}$. Définissons un autre élément de ce groupe par $\delta(q) = (-1)^{d/2}det(q)$. On note $\Phi(G)$ l'ensemble des classes de conjugaison par $SO(d,\mathbb{C})$ d'homomorphismes $\varphi : W_{DF} \to O(d,\mathbb{C})$ vérifiant les conditions précédentes et tels que $\delta(\varphi) = \delta(q)$. Pour $\varphi \in \Phi(G)$, on définit comme ci-dessus le L-paquet $\Pi^G(\varphi)$: ou bien il est vide, ou bien c'est l'ensemble des quotients de Langlands issus de représentations $\pi(\varphi_j) \otimes |det|_F^{b_j}$ de groupes $GL(d_j, F)$ et des éléments σ_0 d'un L-paquet $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$. Le L-paquet est paramétré par un ensemble $\mathcal{E}^G(\varphi) = \mathcal{E}^{G_0}(\varphi_0)$ de caractères d'un groupe $S(\varphi)/S(\varphi)^0 = S(\varphi_0)/S(\varphi_0)^0$ produit de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Signalons toutefois que, pour associer un Lévi L de G à un Lévi $\hat{L}$ de $O(d,\mathbb{C})$, il faut considérer $O(d,\mathbb{C})$ comme le L-groupe de G, ce qui sous-entend que l'on fixe des données supplémentaires cachées (précisément, on identifie un sous-tore maximal de $SO(d,\mathbb{C})$ au L-groupe d'un sous-tore maximal de G).

On admet la validité des conjectures pour les représentations tempérées, telles qu'on les a formulées en [W1] 4.2 et 4.3, complétées comme en 2.1 ci-dessous dans le cas d impair. Dans [W1] 4.8, on a précisé les paramétrages des L-paquets tempérés et ce sont ces paramétrages que nous utilisons. Les paramétrages des L-paquets de $G(F)$ ne dépendent d'aucune donnée auxiliaire dans le cas où d est impair. Ils dépendent par contre de l'élément ν_0 défini ci-dessus dans le cas où d est pair. Celui-ci sert à normaliser les facteurs de transfert.

Soit $\varphi \in \Phi(G)$. Si G est quasi-déployé, on dit que φ est générique s'il existe $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$ et un type de modèles de Whittaker de sorte que σ admette un modèle de ce type. Rappelons que si d est impair, il n'y a qu'un seul type de modèles de Whittaker tandis que, si d est pair, il y a plusieurs types de tels modèles, autant que d'orbites unipotentes régulières de $G(F)$. Si G n'est pas quasi-déployé, on introduit un espace quadratique $(\underline{V}, \underline{q})$ de mêmes dimension et déterminant que (V, q), mais dont le groupe spécial orthogonal $\underline{G}$ est quasi-déployé. A φ est associé un L-paquet $\Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ de représentations de $\underline{G}(F)$. On dit que φ est générique s'il existe un élément $\underline{\sigma}$ de ce paquet et un type de modèles de Whittaker de sorte que $\underline{\sigma}$ admette un modèle de ce type.

On peut évidemment remplacer G par G' dans les considérations ci-dessus. Soient $\varphi \in \Phi(G)$ et $\varphi' \in \Phi(G')$. En suivant Gross et Prasad, on a défini en [W1] 4.9 un signe $E(\varphi, \varphi')$ et des caractères $\boldsymbol{\epsilon}$ de $S(\varphi)/S(\varphi)^0$ et $\boldsymbol{\epsilon}'$ de $S(\varphi')/S(\varphi')^0$. On pose

$$\mu(G, G') = \begin{cases} 1, & \text{si } G \text{ et } G' \text{ sont quasi-déployés,} \\ -1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On sait que si $E(\varphi, \varphi') = \mu(G, G')$, $\boldsymbol{\epsilon}$ appartient à $\mathcal{E}^G(\varphi)$ et $\boldsymbol{\epsilon}'$ appartient à $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$. Si au contraire $E(\varphi, \varphi') = -\mu(G, G')$, $\boldsymbol{\epsilon}$ n'appartient pas à $\mathcal{E}^G(\varphi)$ et $\boldsymbol{\epsilon}'$ n'appartient pas à $\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$.

En plus des conjectures de classification, on doit admettre certains résultats issus de la formule des traces locale tordue, afin d'assurer la validité du théorème de [W2].

Notre principal résultat est le théorème suivant, qui sera démontré dans la section 3.

Théorème. *Soient $\varphi \in \Phi(G)$ et $\varphi' \in \Phi(G')$. On suppose φ et φ' génériques. Alors :*

(i) toutes les représentations induites dont les éléments de $\Pi^G(\varphi)$ et de $\Pi^{G'}(\varphi')$ sont les quotients de Langlands sont irréductibles ;

(ii) si $E(\varphi, \varphi') = -\mu(G, G')$, on a $m(\sigma, \sigma') = 0$ pour tous $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$;

(iii) si $E(\varphi, \varphi') = \mu(G, G')$, on a

$$m(\sigma(\varphi, \boldsymbol{\epsilon}), \sigma'(\varphi', \boldsymbol{\epsilon}')) = 1$$

et $m(\sigma, \sigma') = 0$ pour tous $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$ tels que $(\sigma, \sigma') \neq (\sigma(\varphi, \boldsymbol{\epsilon}), \sigma'(\varphi', \boldsymbol{\epsilon}'))$.

Pour d impair, les conjectures de classification des représentations de $G(F)$ font partie des résultats annoncés par Arthur, au moins dans le cas d'un groupe quasi-déployé ([A1] théorème 30.1). Dans le cas d pair, Arthur annonce un résultat un peu plus faible, où on ne distingue pas deux représentations conjuguées par le groupe orthogonal tout entier, cf. [W1] 4.4. En admettant seulement ces conjectures plus faibles, on peut énoncer un théorème similaire à celui ci-dessus, où on regroupe les représentations conjuguées par le groupe orthogonal.

Il y a trois ingrédients dans la preuve du théorème. En précisant un raisonnement dû à Gan, Gross et Prasad, on prouve dans la première section que les multiplicités sont compatibles à l'induction, sous des hypothèses convenables (proposition 1.3). Cela ramène les assertions (ii) et (iii) du théorème au cas tempéré, pourvu que toutes les induites intervenant soient irréductibles, c'est-à-dire pourvu que l'assertion (i) soit vérifiée. Dans la deuxième section, on établit un critère général d'irréductibilité pour ces induites (théorème 2.13). Signalons qu'il est également vrai pour les groupes symplectiques. La conséquence de ce critère est que, parmi ces induites, il y en a qui sont "les plus réductibles" qu'il est possible. C'est-à-dire que si l'une des induites est réductible, celles-ci le sont aussi. Ce sont celles pour lesquelles la représentation que l'on induit admet un modèle de Whittaker (il y en a plusieurs s'il y a plusieurs types de tels modèles). Pour obtenir le (i) du théorème, il reste à utiliser une conjecture de Shahidi démontrée par Muic qui affirme que si un quotient de Langlands est générique (ce qui fait partie de nos hypothèses : les paquets sont génériques), alors l'induite dont il est quotient est irréductible.

1 Induction et multiplicités

1.1 Notations

Selon le cas, on désigne une représentation d'un groupe soit par la représentation elle-même, disons π, soit par un espace E_π dans lequel elle se réalise. On introduira parfois une représentation σ d'un groupe spécial orthogonal sans préciser au départ de quel groupe il s'agit. Dans ce cas, on notera d_σ la dimension de l'espace quadratique (V,q) du groupe spécial orthogonal duquel σ est une représentation. De même, on introduira parfois une représentation π d'un groupe linéaire (on entend par là un groupe $GL(d,F)$) sans préciser ce groupe. On notera d_π l'entier tel que π est une représentation de $GL(d_\pi,F)$. On note $\check{\sigma}$ la contragrédiente d'une représentation σ.

Soient (V,q) un espace quadratique de groupe spécial orthogonal G et σ une représentation lisse de $G(F)$. La notation

$$\sigma = \pi_1 \times ... \times \pi_t \times \sigma_0,$$

ou encore

$$\sigma = (\times_{i=1,...,t}\pi_i) \times \sigma_0$$

signifie ce qui suit. On fixe une décomposition

$$V = X_1 \oplus ... \oplus X_t \oplus V_0 \oplus Y_t \oplus ... \oplus Y_1.$$

On suppose que les espaces X_i et Y_i sont totalement isotropes et non nuls. En posant $V_i = X_i \oplus Y_i$ pour $i = 1,...,t$, on suppose que les espaces V_i, pour $i = 0,...,t$ sont orthogonaux. On note d_i la dimension de X_i (ou encore celle de Y_i) et d_0 celle de V_0. On note P le sous-groupe parabolique de G qui conserve le drapeau

$$X_1 \subset X_1 \oplus X_2 \subset ... \subset X_1 \oplus ... \oplus X_t,$$

U son radical unipotent et M sa composante de Lévi formée des éléments qui conservent tous les espaces X_i et Y_i. On note G_0 le groupe spécial orthogonal de V_0 et on fixe une base de X_i qui permet de noter $GL(d_i)$ le groupe linéaire de l'espace X_i. On a l'égalité

$$M = GL(d_1) \times ... \times GL(d_t) \times G_0.$$

Le terme σ_0 est une représentation lisse de $G_0(F)$ et, pour tout $i = 1,...,t$, π_i est une représentation lisse de $GL(d_i,F)$. Alors σ est la représentation

$$Ind_P^G(\pi_1 \otimes ... \otimes \pi_t \otimes \sigma_0)$$

de $G(F)$.

Dans le cas où la dimension d de V est paire, cette notation est ambigüe car cette représentation induite peut dépendre du choix de la décomposition de V. En pratique, l'important sera que ces décompositions soient choisies de façon cohérentes.

On utilise une notation similaire

$$\pi = \pi_1 \times ... \times \pi_t = \times_{i=1,...,t}\pi_i$$

pour des représentations de groupes linéaires.

Soit π une représentation admissible irréductible d'un groupe linéaire. Elle possède un caractère central ω_π, qui est un caractère de $F^\times$. Il existe un unique réel e_π tel que $|\omega_\pi(\lambda)| = |\lambda|_F^{e_\pi d_\pi}$ pour tout $\lambda \in F^\times$. On appelle e_π l'exposant de π. Soit $b \in \mathbb{R}$. On note $\pi|.|_F^b$ la représentation $\pi \otimes |det|_F^b$. Si π est unitaire, on a $e_{\pi|.|_F^b} = b$. On appelle support cuspidal de π l'ensemble avec multiplicités $\{\rho_1, .., \rho_k\}$ formé de représentations irréductibles et cuspidales tel que π soit un sous-quotient de l'induite $\times_{i=1,...,k}\rho_i$. On utilise ici, à la suite de Zelevinsky, la notion d'ensembles avec multiplicités. Ils sont toujours finis et peuvent être considérés comme des familles finies prises à l'ordre près.

Soient e et f deux réels tels que $e - f \in \mathbb{N}$. Par abus de notation, on désigne par $[e, f]$ l'ensemble des réels x tels que $e \geq x \geq f$ et $e - x \in \mathbb{N}$. On ordonne cet ensemble par l'ordre opposé de l'ordre ordinaire. Soit ρ une représentation admissible irréductible et cuspidale d'un groupe linéaire. On note $< e, f >_\rho$ l'unique sous-module irréductible de la représentation induite $\times_{x\in[e,f]}\pi|.|_F^x$, le produit étant pris dans l'ordre que l'on vient de préciser. Dans le cas particulier où ρ est unitaire et où $e = (a-1)/2$ et $f = (1-a)/2$ pour un entier $a \geq 1$, on note aussi $St(\rho, a)$ cette représentation (une représentation de Steinberg généralisée). En général, $< e, f >_\rho$ est une telle représentation de Steinberg généralisée tordue par le caractère $|det|_F^{(e+f)/2}$. Pour simplifier la notation, on utilisera aussi la notation $[e, f]$ dans le cas où $f = e + 1$. Par convention, $[e, f] = \emptyset$ dans ce cas.

Soit $N \geq 1$ un entier. Pour tout $k = 1, ..., N$ notons $Q_{N-k,k}$ le sous-groupe parabolique triangulaire supérieur de GL_N de composante de Lévi

$$L_{N-k,k} = GL_{N-k} \times GL(1) \times ... \times GL(1),$$

avec k termes $GL(1)$. Notons $U_{N-k,k}$ son radical unipotent et $P_{N-k,k}$ le sous-groupe de $Q_{N-k,k}$ formé des éléments dont les projections dans les k derniers facteurs $GL(1)$ de $L_{N-k,k}$ valent 1. En particulier, $P_{N-1,1}$ est le groupe appelé "mirabolique". On fixe un caractère continu et non trivial ψ_F de F et on définit un caractère ψ_k de $P_{N-k,k}(F)$ par

$$\psi_k(p) = \psi_F(\sum_{i=N-k+1,...,N-1} p_{i,i+1}),$$

où les $p_{i,i+1}$ sont les coefficients de p.

1.2 Définition des multiplicités

On fixe pour la suite de la section deux espaces quadratiques (V, q) et (V', q') comme dans l'introduction. On pose $r = (d - d' - 1)/2$ et on introduit un espace Z de dimension $2r + 1$ sur F, muni d'une base $(v_k)_{k=-r,...,r}$. On définit une forme bilinéaire symétrique q_Z sur Z par

$$q_Z(\sum_{k=-r,...,r} \lambda_k v_k, \sum_{k=-r,...,r} \lambda'_k v_k) = 2(-1)^d \nu_0 \lambda_0 \lambda'_0 + \sum_{k=1,...,r} (\lambda_{-k}\lambda'_k + \lambda_k \lambda'_{-k}).$$

On fixe un isomorphisme de (V,q) sur la somme orhogonale $(V',q')\oplus(Z,q_Z)$. On note Q le sous-groupe parabolique de G qui conserve le drapeau de sous-espaces

$$Fv_r\subset Fv_r\oplus Fv_{r-1}\subset ...\subset Fv_r\oplus...\oplus Fv_1.$$

On note N son radical unipotent. On définit un caractère ψ_N de $N(F)$ par la formule

$$\psi_N(n)=\psi_F(\sum_{k=0,...,r-1}q(nv_k,v_{-k-1})).$$

Le groupe G' est inclus dans Q et ψ_N est invariant par conjugaison par $G'(F)$. Soient σ et σ' des représentations lisses de $G(F)$ et $G'(F)$. On note $Hom_{G'(F),\psi_F}(\sigma,\sigma')$ l'espace des applications linéaires $l:E_{\sigma'}\to E_\sigma$ telles que

$$l(\sigma(ng')e)=\psi_N(n)\sigma(g')l(e)$$

pour tous $n\in N(F)$, $g'\in G'(F)$, $e\in E_\sigma$. On note $m(\sigma,\sigma')$ ou $m(\sigma',\sigma)$ la dimension de cet espace $Hom_{G'(F),\psi_F}(\sigma',\sigma)$. Cette dimension ne dépend pas des choix effectués (l'espace Z, sa base, le caractère ψ_F). Si σ et σ' sont irréductibles, on a $m(\sigma,\sigma')\leq 1$.

1.3 Induction

Considérons une représentation induite

$$\sigma=\pi_1|.|_F^{b_1}\times...\times\pi_t|.|_F^{b_t}\times\sigma_0$$

de $G(F)$, où

• pour $i=1,...,t$, π_i est une représentation admissible irréductible et tempérée d'un groupe linéaire $GL(N_i,F)$;

• σ_0 est une représentation admissible irréductible et tempérée de $G_0(F)$, où G_0 est le groupe spécial orthogonal d'un certain sous-espace V_0 de V, cf. 1.1 ;

• les b_i sont des nombres réels tels que $b_1\geq b_2\geq...\geq b_t\geq 0$.

On considère une représentation

$$\sigma'=\pi'_1|.|_F^{b'_1}\times...\times\pi'_{t'}|.|_F^{b'_{t'}}\times\sigma'_0$$

de $G'(F)$ vérifiant des hypothèses similaires.

On a défini la multiplicité $m(\sigma,\check{\sigma}')$ dans le paragraphe précédent . On remarque qu'à conjugaison près, on peut supposer que le plus petit des deux espaces V_0 et V'_0 est inclus dans le plus grand et qu'alors, ces deux espaces verifient les mêmes hypothèses que V et V', avec la même constante ν_0. On peut donc définir la multiplicité $m(\sigma_0,\sigma'_0)$. La section est consacrée à la preuve de la proposition suivante.

Proposition. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$m(\sigma,\check{\sigma}')=m(\sigma_0,\sigma'_0).$$

Remarque. On pourrait remplacer σ_0 ou σ'_0 par leurs contragrédientes dans le second membre de cette égalité, cf. [W3] 7.1(1).

Convention. Dans la suite interviendront des inégalités portant sur b_1 et b'_1. Dans le cas où $t=0$, auquel cas b_1 n'est pas défini, on considère que $b_1=0$ dans ces inégalités. De même pour b'_1.

1.4 Une première inégalité

On suppose $d=d'+1$. On considère les données du paragraphe précédent en ce qui concerne le groupe G'. On considère une représentation induite

$$\sigma=\pi|.|_F^b\times\sigma_0$$

de $G(F)$, où π est une représentation admissible irréductible d'un groupe linéaire $GL(N,F)$, unitaire et de la série discrète, b est un réel et σ_0 est une représentation admissible, pas forcément irréductible, d'un groupe $G_0(F)$.

Lemme. *Supposons $b\geq b'_1$. Alors $m(\sigma,\check{\sigma}')\leq m(\sigma',\check{\sigma}_0)$.*

Conformément à notre convention, l'inégalité $b\geq b'_1$ signifie $b\geq 0$ si $t'=0$. La démonstration ci-dessous est inspirée de celle du théorème 15.1 de [GGP].

Preuve. Réalisons σ comme en 1.1. On fixe une décomposition

$$V=X\oplus V_0\oplus Y$$

comme dans ce paragraphe, dont on déduit des groupes P et

$$M=GL(N)\times G_0.$$

On a

$$\sigma=Ind_P^G(\pi|.|_F^b\otimes\sigma_0).$$

A tout $g\in P(F)\backslash G(F)$, associons le sous-espace $g^{-1}(X)$ de V. Il est totalement isotrope et de dimension N. Notons $\mathcal{U}$ le sous-ensemble des $g\in P(F)\backslash G(F)$ tels que $dim(g^{-1}(X)\cap V')=N-1$ et $\mathcal{X}$ celui des g tels que $dim(g^{-1}(X)\cap V')=N$. Alors $\mathcal{U}$ est un ouvert de complémentaire le fermé $\mathcal{X}$. On vérifie que $\mathcal{U}$ est formé d'une seule orbite sous l'action de $G'(F)$. L'ensemble $\mathcal{X}$ est en général formé d'une seule orbite, sauf dans le cas où d est impair et $N=d'/2$, où il y en a deux.

Notons E_σ l'espace de la représentation induite σ formé de fonctions sur $G(F)$ à valeurs dans $E_\pi\otimes_{\mathbb{C}}E_{\sigma_0}$ vérifiant la condition habituelle de transformation à gauche par $P(F)$. Notons $E_{\sigma,\mathcal{U}}$ le sous-espace formé des fonctions à support dans $\mathcal{U}$ et $E_{\sigma,\mathcal{X}}$ le quotient $E_\sigma/E_{\sigma,\mathcal{U}}$. Ces espaces sont stables par $G'(F)$ et on a une suite exacte

$$0\to Hom_{G'(F)}(E_{\sigma,\mathcal{X}},E_{\check{\sigma}'})\to Hom_{G'(F)}(E_\sigma,E_{\check{\sigma}'})\to Hom_{G'(F)}(E_{\sigma,\mathcal{U}},E_{\check{\sigma}'}).\qquad(1)$$

Montrons que

$$Hom_{G'(F)}(E_{\sigma,\mathcal{X}},E_{\check{\sigma}'})=\{0\}.\qquad(2)$$

Supposons que $\mathcal{X}$ soit formé d'une seule orbite pour l'action de $G'(F)$. Quitte à effectuer une conjugaison par un élément de $G(F)$, on peut supposer $X\subset V'$ et $Y\subset V'$. En posant $V'_0=V_0\cap V'$, on a

$$V'=X\oplus V'_0\oplus Y$$

Notons P' et M' le sous-groupe parabolique de G' et sa composante de Lévi associés à cette décomposition. On a $P'=P\cap G'$ et l'application $P'(F)g'\mapsto P(F)g'$ est un homéomorphisme de $P'(F)\backslash G'(F)$ sur $\mathcal{X}$. On en déduit que la représentation de $G'(F)$ dans $E_{\sigma,\mathcal{X}}$ est une représentation induite à partir d'une représentation de $M'(F)$. Pour décrire celle-ci, on doit remarquer que, pour $m'=(x,g'_0)\in GL(N,F)\times G'_0(F)$, on a

$\delta_P(m')^{1/2} = |det(x)|_F^{(d_0+N-1)/2}$ tandis que $\delta_{P'}(m')^{1/2} = |det(x)|_F^{(d_0+N-2)/2}$. On en déduit qu'en notant $\sigma_{0|G'}$ la restriction de σ_0 à $G'(F)$, la représentation de $G'(F)$ dans $E_{\sigma,\mathcal{X}}$ est égale à

$$Ind_{P'}^{G'}((\pi \otimes |det|_F^{b+1/2}) \otimes \sigma_{0|G'}),$$

c'est-à-dire à

$$\pi|.|_F^{b+1/2} \times \sigma_{0|G'},$$

avec les notations de 1.1. Par le théorème de seconde réciprocité de Bernstein, on a

$$Hom_{G'(F)}(E_{\sigma,\mathcal{X}}, E_{\check{\sigma}'}) = Hom_{M'(F)}((\pi \otimes |det|^{b+1/2}) \otimes \sigma_{0|G'}, (\check{\sigma}')_{\bar{P}'}),$$

le terme $(\check{\sigma}')_{\bar{P}'}$ désignant le module de Jacquet normalisé. La représentation π étant irréductible et unitaire, l'exposant de $\pi|.|^{b+1/2}$ est égal à $b+1/2$. La représentation $(\check{\sigma}')_{\bar{P}'}$ est de longueur finie. Pour démontrer (2), il suffit de prouver que, pour tout sous-quotient irréductible cette représentation, de la forme $\pi_\sharp \otimes \sigma'_\sharp$, l'exposant $e_\sharp$ de $\pi_\sharp$ ne peut pas être égal à $b+1/2$. Par le calcul habituel du module de Jacquet d'une induite, on sait qu'une telle représentation $\pi_\sharp$ intervient dans une induite

$$\pi_{1,\flat} \times ... \times \pi_{t',\flat} \times \pi_{0,\sharp} \times \pi_{t',\natural} \times ... \times \pi_{1,\natural}$$

où :

• pour $i = 1, ..., t'$, il existe une représentation irréductible $\tau_{i,\flat}$ d'un groupe linéaire de sorte que $\pi_{i,\flat} \otimes \tau_{i,\flat}$ intervienne comme sous-quotient d'un module de Jacquet de $\check{\pi}'_i|.|^{-b'_i}$ relatif à un sous-groupe parabolique triangulaire inférieur (parce qu'on calcule le module de Jacquet de σ' relativement à $\bar{P}'$) ;

• pour $i = 1, ..., t'$, il existe une représentation irréductible $\tau_{i,\natural}$ d'un groupe linéaire de sorte que $\pi_{i,\natural} \otimes \tau_{i,\natural}$ intervienne comme sous-quotient d'un module de Jacquet de $\pi'_i|.|^{b'_i}$ relatif à un sous-groupe parabolique triangulaire inférieur ;

• il existe une représentation irréductible $\sigma'_{0,\flat}$ d'un groupe spécial orthogonal de sorte que $\pi_{0,\sharp} \times \sigma'_{0,\sharp}$ intervienne dans un module de Jacquet de $\check{\sigma}'_0$ relativement à un sous-groupe parabolique "triangulaire inférieur".

Notons $N_{i,\flat}$, $N_{i,\natural}$ et $N_{0,\sharp}$ les rangs des groupes linéaires dont $\pi_{i,\flat}$, $\pi_{i,\natural}$ et $\pi_{0,\sharp}$ sont des représentations et $e_{i,\flat}$, $e_{i,\natural}$ et $e_{0,\sharp}$ les exposants de ces représentations. Alors on a les égalités

$$N = (\sum_{i=1,...,t'} N_{i,\flat}) + N_{0,\sharp} + (\sum_{i=1,...,t'} N_{i,\natural}),$$

$$Ne_\sharp = (\sum_{i=1,...,t'} N_{i,\flat}(e_{i,\flat} - b'_i)) + N_{0,\sharp}e_{0,\sharp} + (\sum_{i=1,...,t'} N_{i,\natural}(e_{i,\natural} + b'_i)).$$

Parce que les représentations π'_i et $\check{\sigma}'_0$ sont tempérées et qu'on considère leurs modules de Jacquet relatifs à des sous-groupes paraboliques inférieurs, les nombres $e_{i,\flat}$, $e_{i,\natural}$ et $e_{0,\sharp}$ sont négatifs ou nuls. On en déduit l'inégalité $e_\sharp \leq b'_1$. Sous l'hypothèse de l'énoncé, on a donc $e_\sharp \leq b$, a fortiori $e_\sharp \neq b+1/2$, et cela prouve (2) dans le cas où $\mathcal{X}$ est formé d'une seule orbite. Quand il y a deux orbites, $E_{\sigma,\mathcal{X}}$ est somme de deux sous-représentations auxquelles on peut appliquer le même raisonnement. D'où (2).

Etudions la représentation $E_{\sigma,\mathcal{U}}$ de $G'(F)$. Quitte à effectuer une conjugaison par un élément de $G(F)$, on se ramène à la situation suivante. On a une décomposition

$$V' = X' \oplus D' \oplus V_0 \oplus Y',$$

où X' et Y' sont totalement isotropes de dimension $N-1$ et les espaces $X' \oplus Y'$, D' et V_0 sont orthogonaux. L'espace D' est une droite portée par un vecteur v'_0 tel que $q'(v'_0, v'_0) = 2(-1)^{d'}\nu_0$. Rappelons que $V = V' \oplus D$, où D est une droite portée par un vecteur v_0 tel que $q(v_0; v_0) = 2(-1)^d \nu_0$. On a les égalités $X = X' \oplus F(v_0 + v'_0)$, $Y = Y' \oplus F(v_0 - v'_0)$. Posons $V'_\infty = D' \oplus V_0$, notons G'_∞ son groupe spécial orthogonal, P'_∞ le sous-groupe parabolique de G' formé des éléments qui conservent X', $P'_\infty = M'_\infty U'_\infty$ sa décomposition habituelle, où $M'_\infty = GL(N-1) \times G'_\infty$. On a $G_0 \subset G'_\infty$ et on vérifie que $P \cap G' = (GL(N-1) \times G_0)U'_\infty$. La représentation $E_{\sigma,\mathcal{U}}$ de $G'(F)$ est une induite compacte à partir de ce groupe $P \cap G'$. Ici, il n'y a pas de décalage sur les modules : la restriction de δ_P à $P \cap G'$ est le module usuel de ce groupe. Par contre, la représentation que l'on induit n'est pas triviale sur $U'_\infty(F)$. Ce groupe $U'_\infty(F)$ admet une filtration à deux crans

$$0 \to \wedge^2(X') \to U'_\infty(F) \to (V'_\infty \otimes_F X') \to 0.$$

Par projection orthogonale de V'_∞ sur D', on obtient une projection de $U'_\infty(F)$ sur $D' \otimes_F X'$, dont on note $U'_\flat(F)$ le noyau, puis une projection de $(GL(N-1,F) \times G_0(F))U'_\infty(F)$ sur le produit semi-direct $GL(N-1,F) \ltimes (D' \otimes_F X')$. En choisissant des bases convenables, on peut identifier ce dernier groupe au sous-groupe mirabolique $P_{N-1,1}(F)$ de $GL(N,F)$. On a aussi une projection de $(GL(N-1,F) \times G_0(F))U'_\infty(F)$ sur $G_0(F)$, d'où une projection

$$(GL(N-1,F) \times G_0(F))U'_\infty(F) \to P_{N-1,1}(F) \times G_0(F).$$

Notons $(\pi|.|_F^b)_{|P_{N-1,1}}$ la restriction de $\pi|.|_F^b$ en une représentation de $P_{N-1,1}(F)$. Par la projection ci-dessus, on peut considérer $(\pi|.|_F^b)_{|P_{N-1,1}} \otimes \sigma_0$ comme une représentation de $(GL(N-1,F) \times G_0(F))U'_\infty(F)$. On a alors

$$E_{\sigma,\mathcal{U}} = ind_{(GL(N-1)\times G_0)U'_\infty}^{G'}((\pi|.|_F^b)_{|P_{N-1,1}} \otimes \sigma_0),$$

où ind désigne l'induction à supports compacts. D'après [BZ] 3.5, la représentation $(\pi|.|_F^b)_{|P_{N-1,1}}$ possède une filtration

$$\{0\} = \tau_{N+1} \subset \tau_N \subset \tau_{N-1} \subset ... \subset \tau_1 = (\pi|.|_F^b)_{|P_{N-1,1}}.$$

Les quotients de cette filtration vérifient

$$\tau_k/\tau_{k+1} \simeq ind_{P_{N-k,k}}^{P_{N-1,1}}(\Delta^k(\pi|.|_F^b) \otimes \psi_k)$$

où $\Delta^k(\pi|.|_F^b)$ est la k-ième dérivée de $\pi|.|_F^b$, cf. [BZ] 4.3. L'induction à supports compacts étant un foncteur exact, on en déduit une filtration

$$\{0\} = \mu_{N+1} \subset \mu_N \subset \mu_{N-1} \subset ... \subset \mu_1 = E_{\sigma,\mathcal{U}}$$

dont les quotients vérifient

$$\mu_k/\mu_{k+1} \simeq ind_{P_{N-k,k}G_0U'_\flat}^{G'}((\Delta^k(\pi|.|_F^b) \otimes \psi_k \otimes \sigma_0). \tag{3}$$

Pour tout $k = 1, ..., N$, on a une suite exacte

$$1 \to Hom_{G'(F)}(\mu_k/\mu_{k+1}, \check{\sigma}') \to Hom_{G'(F)}(\mu_k, \check{\sigma}') \to Hom_{G'(F)}(\mu_{k+1}, \check{\sigma}'). \tag{4}$$

Montrons que

(5) pour $k = 1, ..., N-1$, $Hom_{G'(F)}(\mu_k/\mu_{k+1}, \check{\sigma}') = \{0\}$.

Introduisons le sous-groupe parabolique Q'_{N-k} de G' formé des éléments qui conservent le sous-espace engendré par les $N-k$ premiers vecteurs de base de X'. Sa composante de Lévi L'_{N-k} s'identifie à $GL(N-k)\times G'_k$, où G'_k est un groupe spécial orthogonal de même type que G'. On a $P_{N-k,k}G_0U'_\flat\subset Q'_{N-k}$ et, dans la formule (3), la représentation que l'on induit est triviale sur le radical unipotent de $Q'_{N-k}(F)$. Introduisons la représentation μ'_k de $G'_k(F)$ définie par

$$\mu'_k=ind_{(U_{N-k,k}G_0U'_\flat)\cap G'_k}^{G'_k}(\psi_k\otimes\sigma_0).$$

Alors

$$\mu_k/\mu_{k+1}\simeq Ind_{Q'_{N-k}}^{G'}(\Delta^k(\pi|.|_F^b)\otimes\mu'_k)=\Delta^k(\pi|.|_F^b)\times\mu'_k.$$

Par le théorème de seconde adjonction de Bernstein, on a

$$Hom_{G'(F)}(\mu_k/\mu_{k+1},\sigma')=Hom_{L'_{N-k}(F)}(\Delta^k(\pi|.|_F^b)\otimes\mu'_k,\sigma'_{\bar{Q}'_{N-k}}).$$

Puisque π est unitaire et de la série discrète, elle est de la forme $St(\rho,a)$, pour une représentation irréductible et cuspidale ρ et un entier $a\geq 1$. D'après [Z] proposition 9.6, $\Delta^k(\pi|.|_F^b)$ est nulle si k n'est pas un multiple de d_ρ. Si $k=ld_\rho$ pour un entier $l\geq 1$, on a $\Delta^k(\pi|.|_F^b)=<(a-1)/2+b,(1-a)/2+b+l>_\rho$. L'exposant de cette représentation est strictement supérieur à b. La preuve de (2) montre que, pour tout sous-quotient irréductible $\pi_\sharp\otimes\sigma'_\sharp$ de $(\check{\sigma}')_{\bar{Q}'_{N-k}}$, l'exposant de $\pi_\sharp$ est inférieur ou égal à b. L'espace d'homomorphismes ci-dessus est donc nul, ce qui prouve (5).

En utilisant (4) et (5) successivement pour $k=1,...,N-1$, on obtient une injection

$$Hom_{G'(F)}(E_{\sigma,\mathcal{U}},E_{\check{\sigma}'})\to Hom_{G'(F)}(\mu_N,\check{\sigma}'). \qquad (6)$$

Pour $k=N$, la représentation $\Delta^k(\pi|.|_F^b)$ disparaît de la définition de μ_N. La contragrédiente de l'induite à supports compacts d'une représentation admissible étant l'induite ordinaire de la contragrédiente, on a

$$Hom_{G'(F)}(\mu_N,\check{\sigma}')=Hom_{G'(F)}(\sigma',Ind_{P_{0,N}G_0U'_\flat}^{G'}(\psi_N^{-1}\otimes\check{\sigma}_0))$$

$$=Hom_{P_{0,N}(F)G_0(F)U'_\flat(F)}(\sigma',\psi_N^{-1}\otimes\check{\sigma}_0).$$

Remarquons que $P_{0,N}U'_\flat$ n'est autre que le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de G' contenu dans P'_∞, de composante de Lévi $GL(1)^{N-1}\times G'_\infty$. Alors le dernier espace ci-dessus n'est autre que celui noté $Hom_{G_0(F),\psi'_F}(\sigma',\check{\sigma}_0)$ en 1.2, pour un choix convenable de caractère ψ'_F. Sa dimension est $m(\sigma',\check{\sigma}_0)$. En utilisant (1), (2) et (6), on obtient le lemme. $\square$

1.5 Rappel d'un résultat de Gan, Gross et Prasad

On conserve la situation du paragraphe précédent. On suppose π cuspidale et on fait l'hypothèse suivante :

(H) soit $\pi_\sharp$ une représentation irréductible d'un groupe linéaire telle qu'il existe une représentation irréductible $\tau_\sharp$ d'un groupe linéaire ou d'un groupe spécial orthogonal de sorte que $\pi_\sharp\otimes\tau_\sharp$ intervienne comme sous-quotient d'un module de Jacquet de l'une des représentations π'_i, $\check{\pi}'_i$ ou $\check{\sigma}'_0$; soit de plus $\beta\in\mathbb{R}$; alors aucun élément du support cuspidal de $\pi_\sharp$ n'est égal à $\pi|.|_F^\beta$.

Lemme. *Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$m(\sigma, \check{\sigma}') = m(\sigma', \check{\sigma}_0).$$

Cf. [GGP] théorème 15.1, dont on reproduit la démonstration.

Preuve. Bernstein a décomposé la catégorie des représentations lisses de $G'(F)$ en somme directe de sous-catégories indexées par des classes d'inertie de supports cuspidaux. Notons $proj$ la projection sur la sous-catégorie contenant $\check{\sigma}'$. On a la suite exacte

$$0 \to proj(E_{\sigma,\mathcal{U}}) \to proj(E_\sigma) \to proj(E_{\sigma,\mathcal{X}}) \to 0.$$

D'après la description de $E_{\sigma,\mathcal{X}}$ donnée en 1.4, l'hypothèse (H) implique que $proj(E_{\sigma,\mathcal{X}}) = \{0\}$. Donc

$$proj(E_{\sigma,\mathcal{U}}) = proj(E_\sigma).$$

Mais, pour toute représentation lisse τ de $G'(F)$, on a

$$Hom_{G'(F)}(\tau, \check{\sigma}') = Hom_{G'(F)}(proj(\tau), \check{\sigma}').$$

Donc

$$Hom_{G'(F)}(E_\sigma, E_{\check{\sigma}'}) = Hom_{G'(F)}(E_{\sigma,\mathcal{U}}, E_{\check{\sigma}'}).$$

On décrit $E_{\sigma,\mathcal{U}}$ comme en 1.4. Puisque π est cuspidale, la filtration de $(\pi|.|_F^b)_{P_{N-1,1}}$ n'a qu'un quotient non nul : on a $(\pi|.|_F^b)_{P_{N-1,1}} = \tau_N$. L'injection (6) de 1.4 devient une bijection et le résultat s'ensuit. $\square$

1.6 L'inégalité $m(\sigma, \check{\sigma}') \leq m(\sigma_0, \sigma_0')$

Dans la situation de 1.3, on va démontrer l'inégalité

$$m(\sigma, \check{\sigma}') \leq m(\sigma_0, \sigma_0'). \quad (1)$$

Remarquons d'abord que, puisque les représentations π_i et π_i' sont irréductibles et tempérées, ce sont des induites de séries discrètes. En les écrivant comme de telles induites, on obtient de nouvelles expressions de σ et σ', similaires aux expressions primitives, mais où les nouvelles représentations π_i et π_i' sont de la série discrète. En oubliant cette construction, on peut supposer que les π_i et π_i' sont de la série discrète.

On utilisera plusieurs fois la construction suivante. Choisissons une représentation admissible irréductible ρ de $GL((d+1-d')/2, F)$, unitaire et cuspidale, vérifiant les analogues de l'hypothèse (H) du paragraphe précédent où σ' est remplacé par $\check{\sigma}'$ ou σ. Une telle représentation existe. Considérons la représentation $\rho \times \sigma'$ d'un groupe de même type que G'. On a

$$\rho \times \sigma' = \rho \times \pi_1'|.|_F^{b_1'} \times ... \times \pi_{t'}'|.|_F^{b_{t'}'} \times \sigma_0'.$$

Mais les hypothèses sur ρ nous permettent de permuter les premiers facteurs :

$$\rho \times \sigma' = \pi_1'|.|_F^{b_1'} \times ... \times \pi_{t'}'|.|_F^{b_{t'}'} \times \rho \times \sigma_0'.$$

C'est une expression du même type que celle de σ' : t' est devenu $t'+1$, le réel supplémentaire $b_{t'+1}'$ est nul et on n'a pas changé σ_0'. Remarquons que $d_{\rho\times\sigma'} = d+1$. On a l'égalité

$$m(\sigma,\check{\sigma}')=m(\rho\times\sigma',\check{\sigma}). \tag{2}$$

En effet, cela résulte de 1.5, où l'on remplace respectivement π, σ_0 et σ' par ρ, σ' et σ.

Revenons à notre problème et supposons d'abord que tous les b_i et b'_i sont nuls. Dans ce cas, prouvons :

(3) on a l'égalité $m(\sigma,\check{\sigma}')=m(\sigma_0,\sigma'_0)$.

Il s'agit ici d'induites unitaires, donc σ et σ' sont semi-simples. Décomposons σ' en composantes irréductibles : $\sigma'=\oplus_{j=1,...,k}\sigma'_j$. On a

$$m(\sigma,\check{\sigma}')=\sum_{j=1,...,k}m(\sigma,\check{\sigma}'_j).$$

Il s'agit ici de représentations tempérées. En utilisant la proposition 5.7 et les lemmes 5.3 et 5.4 de [W3], on a, pour tout $j=1,...,k$,

$$m(\sigma,\check{\sigma}'_j)=m(\sigma_0,\check{\sigma}'_j).$$

Si $d_{\sigma_0}<d'$, on a

$$\sum_{j=1,...,k}m(\sigma_0,\check{\sigma}'_j)=\sum_{j=1,...,k}m(\check{\sigma}'_j,\sigma_0)=m(\check{\sigma}',\sigma_0).$$

Les mêmes résultats de [W3] entraînent que cette dernière multiplicité vaut $m(\check{\sigma}'_0,\sigma_0)$. Mais, pour les représentations irréductibles, le changement d'une représentation en sa contragrédiente ne modifie pas la multiplicité ([W3] 7.1(1)). Le dernier nombre est donc égal à $m(\sigma_0,\sigma'_0)$, d'où (3) dans ce cas. Supposons maintenant $d_{\sigma_0}>d'$. On choisit ρ comme ci-dessus, relativement aux représentations σ_0 et σ'. Remarquons que ρ vérifie alors pour tout j les mêmes hypothèses relativement aux représentations σ_0 et σ'_j. Donc, d'après (2), $m(\sigma_0,\check{\sigma}'_j)=m(\rho\times\sigma'_j,\check{\sigma}_0)$, puis

$$\sum_{j=1,...,k}m(\sigma_0,\check{\sigma}'_j)=m(\rho\times\sigma',\check{\sigma}_0).$$

On peut maintenant appliquer les mêmes résultats de [W3]. Ils entraînent que ce dernier terme vaut $m(\sigma_0,\sigma'_0)$. Cela prouve (3).

Revenons au cas général. On définit un invariant

$$N(\sigma,\sigma')=(\sum_{i=1,...,t;b_i\neq 0}N_i)+(\sum_{i=1,...,t';b'_i\neq 0}N'_i).$$

Soit N un entier naturel. On va démontrer par récurrence sur N que l'inégalité (1) est vérifiée pour toutes données G, G', σ, σ' vérifiant les conditions requises et telles que $N(\sigma,\sigma')=N$. Le cas $N=0$ est couvert par (3). On suppose maintenant $N>0$ et on fixe des données avec $N(\sigma,\sigma')=N$.

1^{er} cas. On suppose $d=d'+1$, $t\geq 1$ et $b_1\geq b'_1$. Posons

$$\sigma_1=\pi_2|.|_F^{b_2}\times...\times\pi_t|.|_F^{b_t}\times\sigma_0.$$

C'est une représentation d'un groupe G_1 de même type que G et on a $\sigma=\pi_1|.|_F^{b_1}\times\sigma_1$. La situation permet d'appliquer le lemme 1.4 : on a

$$m(\sigma,\check{\sigma}')\leq m(\sigma',\check{\sigma}_1).$$

On applique l'hypothèse de récurrence aux groupes G' et G_1 et à leurs représentations σ' et σ_1. C'est loisible puisque $N(\sigma',\sigma_1)=N(\sigma,\sigma')-d_{\pi_1}<N$. On en déduit $m(\sigma',\check{\sigma}_1)\leq m(\sigma_0,\sigma'_0)$, puis (1).

$2^{ème}$ cas. On suppose $t'\geq 1$ et $b'_1\geq b_1$. Choisissons une représentation ρ vérifiant les hypothèses permettant d'appliquer (2). Grâce à cette relation, on a $m(\sigma,\check{\sigma}')=m(\rho\times\sigma',\check{\sigma})$. Mais les représentations $\rho\times\sigma'$ et σ vérifient les hypothèses du premier cas. Donc $m(\rho\times\sigma',\check{\sigma})\leq m(\sigma_0,\sigma'_0)$.

$3^{ème}$ cas. On suppose $t\geq 1$ et $b_1\geq b'_1$. On raisonne comme dans le deuxième cas, à ceci près que les représentations $\rho\times\sigma'$ et σ vérifient maintenant les hypothèses du deuxième cas.

Pour $N>0$, on est forcément dans l'un des deuxième ou troisième cas et cela prouve (1). $\square$

1.7 Produit multilinéaire

On suppose $d=d'+1$. Fixons un sous-tore déployé maximal A' de G' et un sous-tore déployé maximal A de G qui contient A'. Fixons des sous-groupes paraboliques minimaux P'_{min} de G' et P_{min} de G, contenant respectivement A' et A. On peut les choisir de sorte que :

• soient $n'\leq n$ les entiers tels que $A\simeq GL(1)^n$ et $A'\simeq GL(1)^{n'}$; alors le plongement de A' dans A s'identifie à $(a_1,...,a_{n'})\mapsto(a_1,...,a_{n'},1,...,1)$;

• l'ensemble des racines simples de a' relatif à P'_{min} est formé des caractères $(a_1,...,a_{n'})\mapsto a_ia_{i+1}^{-1}$ pour $i=1,...,n'-1$ et de $(a_1,...,a_{n'})\mapsto a_{n'}$, sauf dans le cas où $d'=2n'$, auquel cas la dernière racine est remplacée par $(a_1,...,a_{n'})\mapsto a_{n'-1}a_{n'}$; de même pour l'ensemble des racines simples de T relatif à P_{min}.

On peut supposer que les sous-groupes paraboliques servant à définir les représentations σ et σ' de 1.3 contiennent les sous-groupes paraboliques P_{min}, resp. P'_{min}. On fixe des sous-groupes compacts spéciaux K' de $G'(F)$ et K de $G(F)$, en bonne position relativement à P'_{min} et P_{min}.

En 1.3, on a supposé que les b_i et b'_i étaient réels et vérifiaient certaines inégalités. Oublions ces conditions en prenant pour b_i et b'_i des nombres complexes quelconques. On introduit les paramètres $\mathbf{z}=(z_1,...,z_t)$ et $\mathbf{z}'=(z'_1,...,z'_{t'})$, avec $z_i=q^{-b_i}$ et $z'_i=q^{-b'_i}$, où q est le nombre d'éléments du corps résiduel de F. On note plutôt nos représentations $\sigma_{\mathbf{z}}$ et $\sigma'_{\mathbf{z}'}$. Suivant Bernstein, on peut considérer $\sigma_{\mathbf{z}}$ et $\sigma'_{\mathbf{z}'}$ comme les spécialisations pour ces valeurs des paramètres de représentations à valeurs dans l'algèbre

$$\mathcal{R}=\mathbb{C}[z_1^{\pm 1},...,z_t^{\pm 1},(z'_1)^{\pm 1},...,(z'_{t'})^{\pm 1}].$$

La représentation $\sigma_{\mathbf{z}}$ se réalise dans un espace $\mathcal{E}$ de fonctions

$$e:K\to E_{\pi_1}\otimes_{\mathbb{C}}...\otimes_{\mathbb{C}}E_{\pi_t}\otimes E_{\sigma_0}$$

et cet espace est indépendant de $\mathbf{z}$. On note $\check{\sigma}_{\mathbf{z}}$ la contragrédiente de $\sigma_{\mathbf{z}}$. Elle se réalise de même dans un espace $\check{\mathcal{E}}$ de fonctions

$$\check{e}:K\to E_{\check{\pi}_1}\otimes_{\mathbb{C}}...\otimes_{\mathbb{C}}E_{\check{\pi}_t}\otimes E_{\check{\sigma}_0}.$$

On introduit le produit bilinéaire naturel sur $\mathcal{E}\times\check{\mathcal{E}}$:

$$<e,\check{e}>=\int_K<e(k),\check{e}(k)>dk,$$

où le produit intérieur est l'accouplement naturel sur

$$(E_{\pi_1} \otimes_{\mathbb{C}} ... \otimes_{\mathbb{C}} E_{\pi_t} \otimes E_{\sigma_0}) \times (E_{\check{\pi}_1} \otimes_{\mathbb{C}} ... \otimes_{\mathbb{C}} E_{\check{\pi}_t} \otimes E_{\check{\sigma}_0}).$$

Les mêmes considérations valent pour $\sigma'_{\mathbf{z}'}$ et on introduit des espaces $\mathcal{E}'$ et $\check{\mathcal{E}}'$, munis d'un produit bilinéaire. Pour $e \in \mathcal{E}$, $\check{e} \in \check{\mathcal{E}}$, $e' \in \mathcal{E}'$ et $\check{e}' \in \check{\mathcal{E}}'$, posons

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e}) = \int_{G'(F)} < \sigma'_{\mathbf{z}'}(x)e', \check{e}' >< \sigma_{\mathbf{z}}(x)e, \check{e} > dx.$$

Notons $\mathcal{D}$ le domaine de $(\mathbb{C}^\times)^n \times (\mathbb{C}^\times)^{n'}$ défini par les relations

$$q^{-1/2} < \, |z_i|, \, |z_j|, \, |z_i z'_j|, \, |z_i z'^{-1}_j| \, < q^{1/2},$$

les i, j parcourant tous les entiers possibles.

Lemme. *(i) L'intégrale $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e})$ est absolument convergente pour $(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{D}$.*

(ii) Il existe un polynôme non nul $D \in \mathcal{R}$ et, pour tous e, $\check{e}$, e', $\check{e}'$, il existe un polynôme $L(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e}) \in \mathcal{R}$ de sorte que

$$D(\mathbf{z}, \mathbf{z}')\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e}) = L(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e})$$

pour tout $(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{D}$.

Preuve. Pour simplifier, on suppose $d \neq 2n$ et $d' \neq 2n'$. On indiquera plus loin comment adapter la preuve si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée. Posons $\mathcal{A} = X_*(A')$ et $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = X_*(A') \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^{n'}$. L'ensemble des racines simples de A' relatif à P'_{min} s'identifie à un ensemble Δ' de formes linéaires sur $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. On introduit l'ensemble des poids $\{\varpi_\alpha; \alpha \in \Delta'\}$. Fixons une uniformisante ϖ_F de F et identifions $\mathcal{A}$ à un sous-groupe de $A'(F)$ par

$$\mathbf{m} = (m_1, ..., m_{n'}) \mapsto (\varpi_F^{m_1}, ..., \varpi_F^{m_{t'}}).$$

Introduisons le sous-ensemble $\mathcal{A}^+$ formé des $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$ tels que $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_{t'} \geq 0$. D'après la décomposition de Cartan, il existe un sous-ensemble fini Γ' de $G'(F)$, contenu dans le commutant de A', de sorte que $G'(F)$ soit union disjointe des ensembles $K'\mathbf{m}\gamma'K'$ pour $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+$ et $\gamma' \in \Gamma'$. On a

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e}) = \int_{K' \times K'} \sum_{\gamma' \in \Gamma'} \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+} mes(\mathbf{m}\gamma') < \sigma'_{\mathbf{z}'}(k_1 \mathbf{m}\gamma' k_2)e', \check{e}' >$$

$$< \sigma_{\mathbf{z}}(k_1 \mathbf{m}\gamma' k_2)e, \check{e} > dk_1 dk_2,$$

où $mes(\mathbf{m}\gamma') = mes(K'\mathbf{m}\gamma'K')mes(K')^{-2}$. Nos représentations étant lisses, cela nous permet de fixer $\gamma' \in \Gamma'$ et de remplacer l'intégrale $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e})$ par la série

$$S(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+} mes(\mathbf{m}\gamma') < \sigma'_{\mathbf{z}'}(\mathbf{m})e', \check{e}' >< \sigma_{\mathbf{z}}(\mathbf{m})e, \check{e} >$$

Considérons un élément $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_{t'}) \in \mathcal{A}$ tel que $T_1 > ... > T_{t'} > 0$. Un tel élément permet de décomposer $\mathcal{A}^+$ en union disjointe de sous-ensembles $\mathcal{A}^+(Q')$, où Q' parcourt les sous-groupes paraboliques de G' qui contiennent P'_{min}, cf. [A2] 3.9. A Q' sont associés un sous-ensemble $\Delta'(Q') \subset \Delta'$ et une décomposition $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \mathcal{A}_{Q',\mathbb{R}} \oplus \mathcal{A}_{\mathbb{R}}^{Q'}$. Le premier sous-espace est l'intersection des annulateurs des $\alpha \in \Delta'(Q')$ et le second est engendré par les coracines $\check{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta'(Q')$. On écrit tout $\mathbf{m} \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ sous la forme $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{Q'} + \mathbf{m}^{Q'}$ conformément à cette décomposition. L'ensemble $\mathcal{A}^+_{Q'}$ est celui des $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+$ tels que

• $\alpha(\mathbf{m}_{Q'} - \mathbf{T}_{Q'}) > 0$ pour $\alpha \in \Delta \setminus \Delta'(Q')$;

• $\varpi_\alpha(\mathbf{m}^{Q'} - \mathbf{T}^{Q'}) \leq 0$ pour $\alpha \in \Delta'(Q')$.

On peut fixer Q' et remplacer $S(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e})$ par la série $S(Q'; \mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e})$ où l'on restreint la somme aux $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+(Q')$. Notons M' la composante de Lévi de Q' qui contient A'. On écrit $M' = GL(N_1) \times ... \times GL(N_k) \times G'_1$, où G'_1 est un groupe de même type que G'. Les éléments e' et $\check{e}'$ étant fixés, les résultats de Casselman nous disent que, si $\alpha(\mathbf{T})$ est assez grand pour tout $\alpha \in \Delta$, la propriété suivante est vérifiée. Notons $p_{Q'} : E_{\sigma'_{\mathbf{z}'}} \to E_{\sigma'_{\mathbf{z}',Q'}}$ et $\check{p}_{\bar{Q}'} : E_{\check{\sigma}'_{\mathbf{z}'}} \to E_{(\check{\sigma}'_{\mathbf{z}'})_{\bar{Q}'}}$ les projections sur les modules de Jacquet. Alors il existe un produit bilinéaire $M'(F)$ invariant sur ces modules de sorte que, pour tout $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+(Q')$, on ait l'égalité

$$< \sigma'_{\mathbf{z}'}(\mathbf{m})e', \check{e}' >= \delta_{Q'}(\mathbf{m})^{1/2} < \sigma'_{\mathbf{z}',Q'}(\mathbf{m})p_{Q'}(e'), \check{p}_{\bar{Q}'}(\check{e}') > .$$

Remarquons qu'à Q' est naturellement associé un sous-groupe parabolique Q de G contenant P_{min} : le Lévi M de Q est $GL(N_1) \times ... \times GL(N_k) \times G_1$, où G_1 est de même type que G. Un élément de $\mathcal{A}^+(Q')$ vérifie les mêmes conditions relativement à Q que celles indiquées ci-dessus et on peut appliquer le résultat de Casselman. Les éléments e et $\check{e}$ étant fixés, si $\alpha(\mathbf{T})$ est assez grand pour tout $\alpha \in \Delta$, on a une égalité

$$< \sigma_{\mathbf{z}}(\mathbf{m})e, \check{e} >= \delta_Q(\mathbf{m})^{1/2} < \sigma_{\mathbf{z},Q}(\mathbf{m})p_Q(e), p_{\bar{Q}}(\check{e}) >$$

pour tout $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+(Q')$. Notons $\mathcal{C}(M')$ l'intersection de $\mathcal{A}$ avec le centre de $M'(F)$. On a $\mathcal{C}(M') = \mathbb{Z}^k$. Remarquons que $\mathcal{C}(M')$ est aussi contenu dans le centre de $M(F)$. La représentation $\sigma_{\mathbf{z},Q}$ est de longueur finie, la longueur étant bornée indépendamment de $\mathbf{z}$. D'après le même calcul qu'en 1.4(2), les restrictions à $\mathcal{C}(M') = \mathbb{Z}^k$ des caractères centraux de ses sous-quotients irréductibles sont de la forme

$$\mathbf{c} = (c_1, ..., c_k) \mapsto \chi_{\mathbf{z}}(\mathbf{c}) = \chi(\mathbf{c}) \prod_{i=1,...,t; j=1,...,k} z_i^{(f_{i,j} - f_{-i,j})c_j}, \tag{1}$$

où :

• les $f_{i,j}$ et $f_{-i,j}$ sont des entiers naturels vérifiant

$$\sum_{i=1,...,t} (f_{i,j} + f_{-i,j}) = N_j;$$

• χ est le caractère central d'un sous-quotient irréductible de $\sigma_{\mathbf{1},Q}$, où $\mathbf{1} = (1, ..., 1) \in (\mathbb{C}^\times)^n$.

Cela entraîne qu'il existe un entier $l \geq 0$ de sorte que, pour tous e, $\check{e}$ et tout $\mathbf{m} \in \mathcal{A}$, la fonction

$$\mathbf{c} \mapsto < \sigma_{\mathbf{z},Q}(\mathbf{cm})p_Q(e), p_{\bar{Q}}(\check{e}) > \tag{2}$$

sur $\mathcal{C}(M')$ est combinaison linéaire de fonctions

$$\mathbf{c} \mapsto \chi_{\mathbf{z}}(\mathbf{c}) \prod_{j=1,...,k} c_j^{l_j}, \tag{3}$$

où les l_j sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à l. Un résultat analogue vaut pour la fonction

$$\mathbf{c} \mapsto < \sigma'_{\mathbf{z}',Q'}(\mathbf{m})p_{Q'}(e'), \check{p}_{\bar{Q}'}(\check{e}') > .$$

Le groupe $\mathcal{C}(M')$ agit par translations sur $\mathcal{A}$. On vérifie que l'ensemble $\mathcal{A}^+(Q')$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'orbites. On peut décomposer notre série $S(Q';\mathbf{z},\mathbf{z}';e',\check{e}',e,\check{e})$ en somme finie de séries où l'on restreint l'ensemble de sommation à une intersection $(\mathbf{m}\mathcal{C}(M'))\cap\mathcal{A}^+(Q')$. Considérons une telle série. L'application $\mathbf{c}\mapsto\mathbf{mc}$ identifie l'intersection précédente à un cône $\mathcal{C}(M')^+$ défini par des inégalités $c_j-c_{j+1}\geq C_j$ pour $j=1,...,k-1$ et $c_k\geq C_k$, où les C_j sont certaines constantes. On vérifie qu'il y a une constante $m>0$ telle que $mes(K'\mathbf{mc}\gamma'K')=m\delta_{Q'}(\mathbf{c})^{-1}$ pour tout $\mathbf{c}$ dans ce cône. Alors notre série est bornée par une somme de séries de la forme

$$\sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{C}(M')^+}\delta_{Q'}(\mathbf{c})^{-1/2}\delta_Q(\mathbf{c})^{1/2}\chi'_{\mathbf{z}'}(\mathbf{c})\chi_{\mathbf{z}}(\mathbf{c})\prod_{j=1,\dots,k}|c_j|^{l_j+l'_j}. \qquad (4)$$

On calcule

$$\delta_{Q'}(\mathbf{c})^{-1/2}\delta_Q(\mathbf{c})^{1/2}=q^{-\sum_{j=1,\dots,k}N_jc_j/2}.$$

Considérons l'expression (1). La représentation $\sigma_\mathbf{1}$ est tempérée, donc χ est bornée sur $\mathcal{C}(M')^+$. Si on note $\underline{z}$ le plus grand des nombres $|z_i|^{\pm1}$, $\chi_{\mathbf{z}}(\mathbf{c})$ est essentiellement borné sur $\mathcal{C}(M')^+$ par $\prod_{j=1,\dots,k}\underline{z}^{\sum_{j=1,\dots,k}N_jc_j}$. De même, $\chi'_{\mathbf{z}'}(\mathbf{c})$ est essentiellement borné par $\prod_{j=1,\dots,k}(\underline{z}')^{\sum_{j=1,\dots,k}N_jc_j}$. La série (4) est donc essentiellement bornée par

$$\sum_{\mathbf{c}\in\mathcal{C}(M')^+}\prod_{j=1,\dots,t}(\underline{z}\underline{z}'q^{-1/2})^{N_jc_j}|c_j|^{l_j+l'_j}.$$

Cette dernière série est convergente sous les hypothèses du (i) de l'énoncé et cela démontre cette assertion.

On vérifie que la somme de la série (4) est une fraction rationnelle en $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}'$. Remarquons que les termes qui y interviennent parcourent des ensembles finis indépendants des vecteurs e, $\check{e}$, e', $\check{e}'$. En reprenant le calcul ci-dessus, on voit que, pour démontrer le (ii) de l'énoncé, il suffit de prouver l'assertion suivante. Considérons les différentes fonctions de la forme (3) qui peuvent intervenir. Elles sont déterminées par un caractère χ et des familles d'entiers $f_{i,j}-f_{-i,j}$ et l_j, ces données parcourant des ensembles finis. Notons $(f_{h,\mathbf{z}})_{h\in H}$ cette famille de fonctions, l'ensemble d'indices H étant donc fini. Notons $f_{\mathbf{z}}$ la fonction (2). Ecrivons

$$f_{\mathbf{z}}=\sum_{h\in H}C_h(\mathbf{z})f_{h,\mathbf{z}}.$$

On doit prouver que les différents coefficients $C_h(\mathbf{z})$ sont des fractions rationnelles en $\mathbf{z}$, de dénominateur borné indépendamment de e et $\check{e}$. On doit aussi prouver l'assertion similaire relative au groupe G', mais elle se prouve évidemment de la même façon. Pour $\mathbf{z}$ en position générale, la famille de fonctions $(f_{h,\mathbf{z}})_{h\in H}$ est linéairement indépendante. On peut donc fixer une famille $(\mathbf{c}_h)_{h\in H}$ d'éléments de $\mathcal{C}(M')$ telle que le déterminant de la matrice $(f_{h,\mathbf{z}}(\mathbf{c}_{h'}))_{h,h'\in H}$ soit non nul pour au moins une valeur de $\mathbf{z}$. Ce déterminant est donc un élément non nul de $\mathcal{R}$. Les coefficients $C_h(\mathbf{z})$ sont déterminés par le système d'équations

$$f_{\mathbf{z}}(\mathbf{c}_{h'})=\sum_{h\in H}C_h(\mathbf{z})f_{h,\mathbf{z}}(\mathbf{c}_{h'})$$

pour tout $h'\in H$. Le membre de gauche de cette équation appartient à $\mathcal{R}$. Il en résulte que les $C_h(\mathbf{z})$ sont des fractions rationnelles, de dénominateur divisant le déterminant ci-dessus, lequel ne dépend pas des vecteurs e et $\check{e}$. Cela démontre l'assertion requise et le lemme, sous les hypothèses $d\neq 2n$, $d'\neq 2n'$.

Supposons $d = 2n$. Cela implique que G est déployé et l'hypothèse sur le plongement de V' dans V implique que G' est lui-aussi déployé. Donc $n' = n - 1$. La seule chose qui change dans le raisonnement ci-dessus est que, si $N_1 + ... + N_k = n'$, le Lévi du parabolique Q associé à Q' est $GL(N_1) \times ... \times GL(N_k) \times GL(1)$. Cela n'a aucune incidence. Supposons maintenant $d' = 2n'$. Les deux groupes G et G' sont déployés et on a $n = n'$. Dans la définition de $\mathcal{A}^+$, la dernière inégalité $m_{n'} \geq 0$ doit a priori être remplacée par $m_{n'-1} + m_{n'} \geq 0$. Mais on peut décomposer cet ensemble en deux, l'un sur lequel $m_{n'} \geq 0$ et l'autre sur lequel $m_{n'} < 0$. En changeant l'identification de A' avec $GL(1)^{n'}$ en inversant la dernière coordonnée, et en changeant en conséquence le groupe P_{min}, le deuxième ensemble se ramène à un ensemble du premier type (la condition sur $m_{n'}$ devient $m_{n'} > 0$ au lieu de $m_{n'} \geq 0$, mais c'est sans importance). On peut donc considérer que $\mathcal{A}^+$ est défini par les mêmes inégalités que précédemment. Pour un sous-groupe parabolique Q' tel que $N_1 + ... + N_k < n'$, rien ne change.

Soit Q' tel que $N_1 + ... + N_k = n'$ et $N_k \geq 2$. Si $\Delta'(Q')$ contient la racine $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{n'-1} - \mathbf{m}_{n'}$, de nouveau rien ne change. Supposons que $\Delta'(Q')$ contienne la racine $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}_{n'-1} + \mathbf{m}_{n'}$. On définit Q de sorte que sa composante de Lévi M soit égale à $GL(N_1) \times ... \times GL(N_{k-1}) \times G_1$. On vérifie les deux propriétés suivantes :

(5) notons Δ l'ensemble des racines simples de A associé à P_{min} et $\Delta(Q)$ le sous-ensemble associé à Q ; pour $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+(Q')$ et $\alpha \in \Delta \setminus \Delta(Q)$, on a $\alpha(\mathbf{m}) > \alpha(\mathbf{T})$;

(6) il existe $C \in \mathbb{N}$ tel que $m_i \leq C$ pour tout $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+(Q')$ et tout $i = N_1 + ... + N_{k-1} + 1, ..., n'$.

L'assertion (5) vient de l'inclusion $\Delta \setminus \Delta(Q) \subset \Delta' \setminus \Delta'(Q')$. Démontrons (6). Posons $e = N_1 + ... + N_{k-1}$. Soit $\mathbf{m} \in \mathcal{A}^+(Q')$. Cette hypothèse implique que l'on peut écrire

$$(m_{e+1} - t_{e+1}, ..., m_{n'} - t_{n'}) = (z, ..., z, -z) + (p_1, ..., p_{N_k-1}, -p_{N_k}),$$

avec $z > 0$, $p_1 + ... + p_f \leq 0$ pour tout $f = 1, ..., N_{k-1}$, $p_1 + ... + p_{N_k} = 0$. Cela entraîne $p_{N_k} \geq 0$. Alors $z = t_{n'} - m_{n'} - p_{N_k}$ est majoré (puisque l'on a supposé $m_{n'} \geq 0$). On a aussi $p_1 \leq 0$, donc $m_{e+1} = t_{e+1} + z + p_1$ est majoré. Puisque $m_{e+1} \geq m_{e+2} \geq ... \geq m_{n'} \geq 0$, (6) s'ensuit.

La relation (5) nous permet d'appliquer les résultats de Casselman aux termes provenant du groupe G, pour le sous-groupe parabolique Q. On remplace dans les raisonnements ci-dessus le groupe $\mathcal{C}(M')$ par son analogue $\mathcal{C}(M)$ pour le groupe M. Grâce à la relation (6), $\mathcal{A}^+(Q')$ est inclus dans un nombre fini d'orbites pour l'action de ce groupe. La preuve se poursuit alors comme précédemment.

Soit enfin Q' tel que $N_1 + ... + N_k = n'$ et $N_k = 1$. On décompose notre série en une somme sur les $\mathbf{m}$ tels que $m_{n'} > t_{n'}$ et d'une somme sur les $m_{n'} \leq t_{n'}$. La première se traite comme dans le cas général, en prenant Q de composante de Lévi $GL(N_1) \times ... \times GL(N_k)$. La seconde se traite comme dans le cas particulier ci-dessus en prenant Q de composante de Lévi $GL(N_1) \times ... \times GL(N_{k-1}) \times G_1$. Cela achève la preuve. $\square$

1.8 Preuve de l'inégalité $m(\sigma_0, \sigma'_0) \leq m(\sigma, \check{\sigma}')$

On considère la situation de 1.3 et on suppose d'abord $d = d' + 1$. Il n'y a rien à prouver si $m(\sigma_0, \sigma'_0) = 0$. On suppose donc $m(\sigma_0, \sigma'_0) = 1$. Introduisons un polynôme $D(\mathbf{z}, \mathbf{z}')$ vérifiant les conditions du (ii) du lemme 1.7. Fixons d'abord des familles $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z}'$, telles que $D(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \neq 0$ et dont toutes les coordonnées sont de module 1. Les représentations $\sigma_{\mathbf{z}}$ et $\sigma'_{\mathbf{z}'}$ sont tempérées. La proposition 5.7 et le lemme 5.3 de [W3] nous disent qu'il existe $e \in \mathcal{E}$, $\check{e} \in \check{\mathcal{E}}$, $e' \in \mathcal{E}'$ et $\check{e}' \in \check{\mathcal{E}}'$ tels que $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e}) \neq 0$.

Remarque. Dans [W3], on a considéré des produits hermitiens plutôt que des produits bilinéaires, mais la traduction est facile puisque les représentations sont unitaires.

On a donc aussi $L(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e}) \neq 0$. Ecrivons les coordonnées z_i et z'_i de nos familles sous la forme $z_i = q^{-\beta_i}$, $z'_i = q^{-\beta'_i}$. Pour $s \in \mathbb{C}$, introduisons les familles $\mathbf{z}(s)$ et $\mathbf{z}'(s)$ de coordonnées $z_i(s) = q^{-s\beta_i+(s-1)b_i}$, $z'_i(s) = q^{-s\beta'_i+(s-1)b'_i}$. Pour tous e, $\check{e}$, e', $\check{e}'$, l'application $s \mapsto L(\mathbf{z}(s), \mathbf{z}'(s); e', \check{e}', e, \check{e})$ est holomorphe. Elle est non nulle pour au moins un choix de e, $\check{e}$, e', $\check{e}'$. Notons N le plus grand entier tel que, pour tous e, $\check{e}$, e', $\check{e}'$, cette application soit divisible par s^N. Posons

$$L_{\sigma,\sigma'}(e', \check{e}', e, \check{e}) = lim_{s\to 0} s^{-N} L(\mathbf{z}(s), \mathbf{z}'(s); e', \check{e}', e, \check{e}).$$

Il y a au moins un choix de vecteurs e, $\check{e}$, e', $\check{e}'$ tel que $L_{\sigma,\sigma'}(e', \check{e}', e, \check{e}) \neq 0$. Dans le domaine $\mathcal{D}$, on vérifie aisément l'égalité

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; \sigma'_{\mathbf{z}'}(g')e', \check{e}', \sigma_{\mathbf{z}}(g')e, \check{e}) = \mathcal{L}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e})$$

pour tout $g' \in G'(F)$. On a une même relation pour l'application $L(\mathbf{z}, \mathbf{z}'; e', \check{e}', e, \check{e})$ et cette égalité se prolonge algébriquement à toutes familles $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}'$. Il en résulte que l'application $L_{\sigma,\sigma'}$ ci-dessus vérifie la relation

$$L_{\sigma,\sigma'}(\sigma'(g')e', \check{e}', \sigma(g')e, \check{e}) = L_{\sigma,\sigma'}(e', \check{e}', e, \check{e}).$$

Fixons alors $\check{e}$ et $\check{e}'$ et définissons une application linéaire $l : E_\sigma \to E_{\check{\sigma}'}$ par l'égalité

$$< e', l(e) >= L_{\sigma,\sigma'}(e', \check{e}', e, \check{e}).$$

Elle appartient à $Hom_{G'}(\sigma, \check{\sigma}')$. Pour un bon choix de $\check{e}$, $\check{e}'$, elle est non nulle. Donc $m(\sigma, \check{\sigma}') \geq 1$.

Supposons maintenant $d > d' + 1$. On choisit ρ comme en 1.6(2). On a $m(\sigma, \check{\sigma}') = m(\rho \times \sigma', \check{\sigma})$. D'après ce que l'on vient de prouver, cette dernière multiplicité est supérieure ou égale à 1.

L'inégalité que l'on vient de prouver et celle de 1.6 démontrent la proposition 1.3.

2 Irréductibilité et représentations génériques

2.1 Rappels sur les paramétrages

Dans cette section, G est un groupe spécial orthogonal ou symplectique défini sur F. Précisément, cela signifie que l'on fixe un espace vectoriel V sur F de dimension finie et une forme bilinéaire q non dégénérée sur V qui est soit symétrique, soit antisymétrique. Alors G est la composante neutre du groupe d'automorphismes de (V, q). On note d_G la dimension de V. Un groupe similaire G' est dit de même type que G s'il est associé à un couple (V', q') satisfaisant les conditions suivantes : q' vérifie la même condition de symétrie que q ; le plus grand des espaces (V, q) et (V', q') est isomorphe à la somme orthogonale du plus petit et de plans hyperboliques.

On considère que le L-groupe $\hat{G}$ de G est :

• le groupe spécial orthogonal complexe $SO(\hat{d}_G,\mathbb{C})$, où $\hat{d}_G = d_G + 1$, si G est symplectique ;

• le groupe symplectique complexe $Sp(\hat{d}_G,\mathbb{C})$, où $\hat{d}_G = d_G - 1$, si G est spécial orthogonal "impair" (c'est-à-dire que d_G est impair) ;

• le groupe orthogonal complexe $O(\hat{d}_G,\mathbb{C})$, où $\hat{d}_G = d_G$, si G est spécial orthogonal "pair" (c'est-à-dire que d_G est pair).

Toutes les représentations de groupes réductifs que l'on considérera seront supposées admissibles et de longueur finie. Dans les cas symplectique ou spécial orthogonal impair, on conjecture (et nous admettons cette conjecture) que l'ensemble des classes de conjugaison de représentations irréductibles tempérées de $G(F)$ se décompose en union disjointe de L-paquets $\Pi^G(\varphi)$, où φ parcourt les classes de conjugaison par $\hat{G}$ d'homomorphismes $\varphi : W_{DF} \to \hat{G}$ qui vérifient quelques conditions usuelles de continuité et de semi-simplicité et qui sont tempérés, c'est-à-dire que l'image de W_F par φ est relativement compacte. Un tel homomorphisme φ se pousse en un homomorphisme de W_{DF} dans $GL(\hat{d}_G,\mathbb{C})$. Via la correspondance de Langlands (théorème de Harris-Taylor et Henniart), on associe à φ une représentation irréductible $\pi(\varphi)$ de $GL(\hat{d}_G, F)$. Elle est tempérée et autoduale. On peut la prolonger en une représentation du produit semi-direct $GL(\hat{d}_G, F) \rtimes \{1,\theta\}$, où θ est l'automorphisme extérieur habituel défini par $\theta(g) = {}^tg^{-1}$. Notons $\tilde{\pi}(\varphi)$ sa restriction à la composante connexe non neutre $GL(\hat{d}_G, F)\theta$. D'autre part, pour toute représentation σ, notons Θ_σ son caractère. Les propriétés essentielles du L-paquet $\Pi^G(\varphi)$ sont les suivantes :

(1) la somme $\Theta_{\Pi^G(\varphi)} = \sum_{\pi\in\Pi^G(\varphi)} \Theta_\pi$ est une distribution stable ;

(2) si G est quasi-déployé, il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que la distribution $\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi)}$ soit le transfert, par endoscopie tordue, de $c\Theta_{\Pi^G(\varphi)}$;

(3) si G n'est pas quasi-déployé, introduisons sa forme quasi-déployée $\underline{G}$ et le L-paquet $\Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ de représentations de $\underline{G}(F)$; alors il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\Theta_{\Pi^G(\varphi)}$ soit le transfert, par endoscopie ordinaire, de $c\Theta_{\Pi^{\underline{G}}(\varphi)}$.

Ici, les correspondances endoscopiques entre classes de conjugaison stable sont injectives. Les conditions (2) et (3) se traduisent concrètement de la façon suivante. Soit $g \in G(F)$ un élément semi-simple fortement régulier. Alors on a une égalité

$$\Theta_{\Pi^G(\varphi)}(g) = c\sum_{\tilde{x}} \Delta(g,\tilde{x})\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi)}(\tilde{x}), \tag{4}$$

où $\tilde{x}$ parcourt un certain sous-ensemble fini de $GL(\hat{d}_G, F)\theta$ associé à g et $\Delta(g,\tilde{x})$ est un facteur de transfert (c'est l'inverse du facteur de Kottwitz-Shelstad). Par indépendance linéaire des caractères, ces égalités déterminent uniquement le paquet $\Pi^G(\varphi)$.

Remarque. Dans le cas d'un groupe orthogonal impair, les conjectures posées en [W1] 4.2 faisaient intervenir l'endoscopie tordue entre G et $GL(\hat{d}_G + 1)\theta$. Ici, on utilise l'endoscopie tordue plus habituelle entre G et $GL(\hat{d}_G)\theta$. Pour la validité des résultats de cette section, celle-ci suffit. Mais, pour le reste de l'article, on doit admettre aussi la validité des conjectures telles qu'on les a formulées en [W1].

Dans le cas d'un groupe spécial orthogonal pair, il faut imposer à φ une condition portant sur le déterminant $det\circ\varphi$ (celui-ci doit correspondre au discriminant de la forme q, cf. [M1] paragraphe 2.1 et l'introduction ci-dessus), et on considère les classes de conjugaison de tels φ par $SO(\hat{d}_G,\mathbb{C})$ et non par $O(\hat{d}_G,\mathbb{C})$. Le paquet $\Pi^G(\varphi)$ vérifie les mêmes conditions que ci-dessus. Mais les correspondances entre classes de conjugaison stable ne sont plus injectives : deux classes conjuguées par le groupe orthogonal tout entier ne sont pas discernables par endoscopie tordue. Notons G^+ ce groupe orthogonal et fixons un élément $w \in G^+(F) \setminus G(F)$. La relation (4) devient

$$\Theta_{\Pi^G(\varphi)}(g) + \Theta_{\Pi^G(\varphi)}(wgw^{-1}) = c\sum_{\tilde{x}} \Delta(g, \tilde{x})\Theta_{\tilde{\pi}(\varphi)}(\tilde{x}).$$

Ces relations ne déterminent plus $\Pi^G(\varphi)$. Toutefois, pour toute représentation σ de $G(F)$, notons σ^w la représentation $g \mapsto \sigma(wgw^{-1})$ et posons $\Pi^G(\varphi)^w = \{\pi^w; \pi \in \Pi^G(\varphi)\}$. Alors l'ensemble avec multiplicités $\bar{\Pi}(\varphi) = \Pi^G(\varphi) \sqcup \Pi^G(\varphi)^w$ est uniquement déterminé.

Comme on l'a expliqué dans l'introduction, la définition des L-paquets s'étend au cas non tempéré en utilisant la classification de Langlands.

Notation. Soit π une représentation irréductible de $G(F)$. On pose $\pi^{GL} = \pi(\varphi)$, où φ est le paramètre de Langlands tel que $\pi \in \Pi^G(\varphi)$. C'est une représentation de $GL(\hat{d}_G, F)$.

2.2 Induction et modules de Jacquet

Soit π une représentation irréductible tempérée d'un groupe linéaire $GL(d_\pi, F)$. Le support cuspidal de π a la forme suivante : il existe un ensemble fini avec multiplicités, que l'on note $Jord(\pi)$, de couples (ρ, a), où ρ est une représentation irréductible cuspidale et unitaire d'un groupe linéaire et $a \geq 1$ est un entier, de telle sorte que le support cuspidal de π est exactement

$$\cup_{(\rho,a)\in Jord(\pi)} \cup_{x\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]} \{\rho|.|_F^x\}.$$

On a donc défini $Jord(\pi)$ pour toute représentation irréductible tempérée π d'un groupe linéaire. On transpose cela en une définition de $Jord(\pi)$ pour toute représentation irréductible tempérée π de $G(F)$, on posant $Jord(\pi) = Jord(\pi^{GL})$, avec la notation introduite en 2.1. Remarquons que $Jord(\pi)$ ne dépend que du L-paquet Π contenant π, ce qui permet de définir $Jord(\Pi)$ pour un tel L-paquet.

Soit π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$. L'ensemble $Jord(\pi)$ a les propriétés suivantes. Pour tout $(\rho, a) \in Jord(\pi)$, ou bien la mutliplicité de (ρ, a) dans $Jord(\pi)$ est paire, ou bien la représentation de W_{DF} associée à la représentation de Steinberg $St(\rho, a)$ est à valeurs dans un groupe classique de même type que le groupe dual de G. Dans ce dernier cas, on dira que (ρ, a) a bonne parité. Dans les autres cas, on dira que (ρ, a) n'a pas bonne parité. Ce dernier cas couvre à la fois celui où ρ n'est pas autodual et celui où le paramètre de Langlands de $St(\rho, a)$, bien qu'autodual, ne se factorise pas par le bon groupe classique.

Le facteur de transfert de Kottwitz et Shelstad est compatible à l'induction. Cela signifie la chose suivante. Supposons G quasi-déployé et fixons un tel facteur Δ pour l'endoscopie tordue entre G et $GL(\hat{d}_G)\theta$. Soit L un Lévi de G. Il lui correspond un Lévi θ-stable $\mathbf{L}$ de $GL(\hat{d}_G)$. Soient $g \in L(F)$ et $\tilde{x} \in \mathbf{L}(F)\theta$ des éléments suffisamment réguliers. Définissons un facteur $\Delta_{L,\mathbf{L}\theta}(g, \tilde{x})$ par

$\Delta_{L,\mathbf{L}\theta}(g, \tilde{x}) = \Delta(g, \tilde{x})$ si les classes de conjugaison stable de g dans $L(F)$ et de $\tilde{x}$ dans $\mathbf{L}(F)\theta$ se correspondent ;

$\Delta_{L,\mathbf{L}\theta}(g, \tilde{x}) = 0$ sinon.

Alors $\Delta_{L,\mathbf{L}\theta}$ est un facteur de transfert pour le couple $(L, \mathbf{L}\theta)$. Cela entraîne que le transfert est compatible à l'induction et cela a la conséquence suivante. Soit Π un paquet de représentations tempérées de $G(F)$. Supposons donnée une décomposition en union disjointe (au sens des ensembles avec multiplicités) :

$$Jord(\Pi) = \mathcal{E} \sqcup \mathcal{F} \sqcup \check{\mathcal{E}},$$

où $\check{\mathcal{E}} = \{(\check{\rho}, a); (\rho, a) \in \mathcal{E}\}$. Il existe un L-paquet tempéré Π' d'un groupe de même type que G tel que $\mathcal{F} = Jord(\Pi')$. Alors

(1) si G est symplectique ou spécial orthogonal impair, Π est exactement formé des composantes irréductibles de toutes les induites

$$(\times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} St(\rho, a)) \times \pi'$$

quand π' décrit Π'.

Dans le cas où G est spécial orthogonal pair, on a une assertion analogue. On doit remplacer Π et Π' par les paquets $\bar{\Pi}$ et $\bar{\Pi}'$ définis en 2.1. Dans le cas où le sous-groupe parabolique P servant à définir l'induite ci-dessus n'est pas semblable à wPw^{-1}, il faut sommer sur les deux induites possibles.

Notons φ et φ' les paramètres de Langlands de Π et Π'. L'assertion (1) résulte simplement du fait que la somme des caractères des composantes en question est stable et se transfère en le caractère de l'induite tordue

$$(\times_{(\rho,a)\in\mathcal{E}} St(\rho, a)) \times \tilde{\pi}(\varphi').$$

Or cette dernière n'est autre que $\tilde{\pi}(\varphi)$. $\square$

En particulier, un paquet tempéré Π est formé de représentations de la série discrète si et seulement si tous les éléments de $Jord(\Pi)$ sont de bonne parité et interviennent avec multiplicité 1.

Une autre conséquence concerne les modules de Jacquet. Fixons un sous-groupe parabolique P de G de Lévi $GL(d_1) \times ... \times GL(d_m) \times G'$. Pour $i = 1, ..., m$, soient ρ_i une représentation irréductible cuspidale de $GL(d_i, F)$, pas forcément unitaire. Pour une représentation irréductible π de $G(F)$, notons $Jac_{\rho_1,...,\rho_m}(\pi)$ la représentation semi-simple de $G'(F)$ telle que le semi-simplifié du module de Jacquet π_P soit la somme de $\rho_1 \otimes ... \otimes \rho_m \otimes Jac_{\rho_1,...,\rho_m}(\pi)$ et de représentations dont les premières composantes ne sont pas égales à $\rho_1 \otimes ... \otimes \rho_m$. Soit π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$. On a

(2) supposons $Jac_{\rho_1,...,\rho_m}(\pi) \neq \{0\}$; alors pour tout $(\rho, a) \in Jord(\pi)$, il existe deux éléments $b_{\rho,a}$ et $\check{b}_{\rho,a}$ de $[(a+1)/2, -(a+1)/2]$, avec $b_{\rho,a} > \check{b}_{\rho,a}$ tels que :

• la famille $(\rho_i)_{i=1,...,m}$ s'obtienne en mélangeant les familles $(\rho|.|_F^x)_{x\in[(a-1)/2, b_{\rho,a}]}$, pour $(\rho, a) \in Jord(\pi)$, sans changer l'ordre dans chacune d'elles ;

• la famille $(\check{\rho}_i)_{i=m,...,1}$ s'obtienne en mélangeant les familles $(\rho|.|_F^x)_{x\in[\check{b}_{\rho,a}, -(a-1)/2]}$, pour $(\rho, a) \in Jord(\pi)$, sans changer l'ordre dans chacune d'elles.

En effet, supposons G symplectique ou spécial orthogonal impair. Soit Π le L-paquet contenant π. D'après un lemme analogue à [MW] lemme 4.2.1, la somme des caractères des $Jac_{\rho_1,...,\rho_m}(\pi_1)$, pour $\pi_1 \in \Pi$, est stable et a pour transfert un certain module de Jacquet "tordu" $Jac^\theta_{\rho_1,...,\rho_m}(\pi^{GL})$. En tant que représentation d'un groupe linéaire non tordu, celui-ci se construit de façon analogue à ci-dessus. On note $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de $GL(\hat{d}_G)$ de Lévi

$$GL(d_1) \times ... \times GL(d_m) \times GL(d_0) \times GL(d_m) \times ... \times GL(d_1).$$

Alors $Jac^\theta_{\rho_1,...,\rho_m}(\pi^{GL})$ est la représentation semi-simple de $GL(d_0, F)$ telle que le module de Jacquet $(\pi^{GL})_{\mathbf{P}}$ soit la somme de

$$\rho_1 \otimes ... \otimes \rho_m \otimes Jac^\theta_{\rho_1,...,\rho_m}(\pi^{GL})) \otimes \check{\rho}_m \otimes ... \otimes \check{\rho}_1,$$

et de représentations dont les composantes non centrales ne sont pas celles ci-dessus. L'hypothèse que $Jac_{\rho_1,\ldots,\rho_m}(\pi) \neq \{0\}$ impose que ce module de Jacquet tordu n'est pas nul. Mais on sait bien calculer $(\pi^{GL})_{\mathbf{P}}$ et la conclusion s'ensuit. Dans le cas où G est spécial orthogonal pair, la démonstration s'adapte en considérant le paquet $\bar{\Pi}$. $\square$

On a un résultat plus précis pour des familles particulières. Par exemple, fixons une représentation irréductible ρ cuspidale et unitaire d'un groupe linéaire et un réel $x > 0$ et supposons $\rho_i = \rho|.|_F^x$ pour tout $i = 1, ..., m$. On a

(3) supposons $Jac_{\rho_1,\ldots,\rho_m}(\pi) \neq \{0\}$; alors x est un demi-entier et $(\rho, 2x+1)$ intervient avec multiplicité au moins m dans $Jord(\pi)$.

Cela résulte immédiatement de (2). $\square$

Soit Π un paquet de représentations tempérées de $G(F)$. Soit $(\rho, a) \in Jord(\Pi)$ avec $a \geq 2$, notons m sa multiplicité. Notons Π^- le paquet tempéré tel que $Jord(\Pi^-)$ se déduise de $Jord(\Pi)$ en remplaçant les m copies de (ρ, a) par m copies de $(\rho, a-2)$. Prenons $\rho_i = \rho|.|_F^{(a-1)/2}$ pour $i = 1, ..., m$. Soit $\pi \in \Pi$. Alors

(4) toutes les composantes irréductibles de $Jac_{\rho_1,\ldots,\rho_m}(\pi)$ appartiennent à Π^- dans le cas symplectique ou orthogonal impair, à $\bar{\Pi}^-$ dans le cas orthogonal pair.

En notant φ et φ^- les paramètres de Langlands des paquets Π et Π^-, on calcule facilement

$$Jac^{\theta}_{\rho_1,\ldots,\rho_m}(\pi(\varphi)) = \pi(\varphi^-).$$

Alors la même preuve que celle de (2) entraîne (4). $\square$

2.3 Support cuspidal étendu

Dans la suite de la section, on suppose G symplectique ou spécial orthogonal impair. On indiquera dans le dernier paragraphe 2.15 comment adapter les arguments au cas d'un groupe spécial orthogonal pair.

Soit π une représentation irréductible de $G(F)$. On appelle support cuspidal étendu de π le support cuspidal ordinaire de π^{GL}. C'est un ensemble avec multiplicités de représentations irréductibles cuspidales non nécessairement unitaires de groupes linéaires. On remarque que par sa construction, cet ensemble est stable par passage à la contragrédiente.

Lemme. *Soit π une représentation de $G(F)$ de la forme $\pi = \sigma \times \pi'$, où σ est une représentation irréductible d'un groupe linéaire et π' une représentation irréductible d'un groupe de même type que G. Alors tout sous-quotient irréductible de π a pour support cuspidal étendu l'union disjointe du support cuspidal étendu de π' et des supports cuspidaux ordinaires de σ et $\check{\sigma}$.*

Ceci permet de parler du support cuspidal étendu d'une représentation induite même si celle-ci n'est pas irréductible : c'est le support cuspidal étendu de n'importe lequel de ses sous-quotients irréductibles.

Preuve. Soit π une représentation irréductible de $G(F)$. On peut la réaliser comme sous-quotient d'une induite

$$(\times_{i=1,\ldots,v}\rho_i) \times \pi_{cusp},$$

où π_{cusp} est une représentation irréductible cuspidale d'un groupe de même type que G et, pour tout $i = 1, ..., v$, ρ_i est une représentation irréductible cuspidale d'un groupe linéaire, pas forcément unitaire. Appelons support cuspidal ordinaire de π l'ensemble avec multiplicités $\{\rho_i; i=1,...,v\} \sqcup \{\check{\rho}_i; i=1,...,v\} \sqcup \{\pi_{cusp}\}$. On sait qu'il ne dépend pas de l'induite (1) choisie. Il est formé de représentations de groupes linéaires et d'au plus une représentation π_{cusp} d'un groupe de même type que G (cette représentation disparaît ici et dans la suite quand ce groupe est réduit à 1). On va montrer

(1) le support cuspidal étendu de π est l'union disjointe de celui de π_{cusp} et du complémentaire de $\{\pi_{cusp}\}$ dans le support cuspidal ordinaire de π.

Cette assertion entraîne le lemme car, dans sous les hypothèses de l'énoncé, le support cuspidal ordinaire de tout sous-quotient irréductible de $\sigma \times \pi'$ est l'union disjointe de celui de π' et de ceux de σ et $\check{\sigma}$.

Pour prouver (1), on utilise la remarque suivante :

(2) supposons que π apparaisse comme sous-quotient d'une induite $\sigma_1 \times ... \times \sigma_v \times \pi'$, où π' et les σ_i sont irréductibles et où $v \geq 1$, et que l'on sache que le support cuspidal étendu soit réunion de celui de π' et des supports cuspidaux ordinaires des σ_i et des $\check{\sigma}_i$ pour $i=1,...,v$; alors (1) est vrai pour π.

En effet, le support cuspidal ordinaire de π est forcément réunion de celui de π' et de ceux des σ_i et $\check{\sigma}_i$ pour $i=1,...,v$. En raisonnant par récurrence sur d_G, on peut supposer que le support cuspidal étendu de π' se déduit de son support cuspidal étendu de la façon prescrite par (1) et on en déduit que le support cuspidal étendu de π se déduit de la même façon de son support cuspidal ordinaire.

Si π n'est pas tempérée, on réalise π comme quotient de Langlands d'une induite comme en (2), où π' est tempérée et les σ_i sont des représentations tempérées tordues par un caractère. Par définition du support cuspidal étendu de π, les hypothèses de (2) sont satisfaites. Donc (1) est vérifiée pour π.

Supposons que π soit tempérée et qu'il existe un élément (ρ, a) de $Jord(\pi)$ tel que, ou bien (ρ, a) ne soit pas la bonne parité, ou bien (ρ, a) soit de bonne parité mais intervienne avec multiplicité au moins 2. Alors 2.2(1) permet de réaliser π comme sous-quotient d'une induite de sorte que les hypothèses de (2) soient satisfaites. D'où la conclusion dans ce cas.

Supposons que π soit tempérée, que $Jord(\pi)$ soit formé de couples (ρ, a) de bonne parité intervenant avec multiplicité 1, et que π ne soit pas cuspidale. Cette dernière hypothèse entraîne que l'on peut réaliser π comme sous-module d'un induite $\rho' \times \pi'$, où π' est irréductible et ρ' est irréductible et cuspidale, pas forcément unitaire. D'après l'hypothèse sur $Jord(\pi)$, 2.2(2) entraîne qu'il existe $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ tel que $a \geq 2$ et $\rho' = \rho|.|_F^{(a-1)/2}$. La relation 2.2(3) entraîne alors que le support cuspidal étendu de π est réunion de celui de π' et de $\{\rho', \check{\rho}'\}$. Autrement dit, les hypothèses de (2) sont vérifiées et on conclut.

On est ramené au cas où π est cuspidale. Mais alors (1) est tautologique. □

Remarque. Soient π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$, ρ une représentation irréductible cuspidale et unitaire d'un groupe linéaire et $s \in \mathbb{R}$. Supposons que l'induite $\rho|.|_F^s \times \pi$ ait un sous-quotient irréductible ayant même support cuspidal qu'une représentation tempérée. Alors l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- $s = 0$;
- s est un demi-entier avec $|s| \geq 1$, $\rho \simeq \check{\rho}$ et $Jord(\pi)$ contient le couple $(\rho, 2|s|-1)$
- $s = \pm 1/2$ et $(\rho, 2)$ a bonne parité.

Cela résulte du lemme ci-dessus et des propriétés du support cuspidal étendu d'une représentation tempérée.

2.4 Support cuspidal étendu et induction dans le cas tempéré

Lemme. *Soit π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$. On suppose qu'elle est sous-quotient d'une induite*

$$< e, f >_\rho \times\pi'$$

où $[e, f]$ est un segment tel que $e \geq 0 \geq f$, ρ est une repésentation irréductible cuspidale et unitaire d'un groupe linéaire et π' est une représentation irréductible tempérée d'un groupe de même type que G . Alors l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- *$\rho \simeq \check{\rho}$, e et f sont des demi-entiers et $Jord(\pi) = Jord(\pi')\cup\{(\rho, 2e+1), (\rho, -2f+1)\}$;*
- *$\rho \not\simeq \check{\rho}$, $e = -f$ et $Jord(\pi) = Jord(\pi') \cup \{(\rho, 2e + 1), (\check{\rho}, 2e + 1)\}$.*

Preuve. Le support cuspidal étendu de π est, d'après le lemme précédent, l'union de celui de π' avec $\cup_{x\in[e,f]}\{\rho|.|_F^x\} \cup_{x\in[-f,-e]} \{\check{\rho}|.|_F^x\}$. Les conditions sur ρ, e, f résultent des propriétés rappelées en 2.2 du support cuspidal étendu des représentations tempérées. □

2.5 Un lemme technique

Lemme. *Considérons une induite*

$$\sigma|.|^s \times \pi',$$

où π' est une représentation irréductible tempérée d'un groupe de même type que G, $\sigma = St(\rho, a)$ est une représentation de Steinberg généralisée tempérée d'un groupe linéaire et $s > 0$ est un réel. Alors le quotient de Langlands de cette induite est l'unique sous-quotient irréductible qui possède une inclusion dans une induite de la forme

$$(\times_{x\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]}\check{\rho}|.|_F^{x-s}) \times \tau,$$

où τ est une représentation non nécessairement irréductible d'un groupe de même type que G. En particulier si

$$\sigma|.|_F^s \times \pi' \hookrightarrow (\times_{x\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]}\check{\rho}|.|_F^{x-s}) \times \tau$$

avec τ comme ci-dessus, l'induite $\sigma|.|_F^s \times \pi'$ est irréductible.

Preuve. Il est clair que le quotient de Langlands de l'induite $\sigma|.|_F^s \times \pi'$ a la propriété requise car il est inclus dans $\check{\sigma}|.|_F^{-s} \times \pi'$ et cette induite est elle-même incluse dans $(\times_{x\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]}\check{\rho}|.|_F^{x-s}) \times \pi'$. Soit donc π un sous-quotient irréductible de l'induite ayant une inclusion comme dans l'énoncé. Comme π est irréductible, une telle inclusion en donne une de même type mais avec τ irréductible. On suppose donc que τ est irréductible. Par réciprocité de Frobenius un module de Jacquet convenable de π' admet $(\otimes_{x\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]}\check{\rho}|.|_F^{x-s}) \otimes \tau$ comme quotient.

On sait calculer tous les termes du module de Jacquet de l'induite $\sigma|.|_F^s \times \pi'$. Les termes d'un module de Jacquet cuspidal de cette induite peuvent se regrouper en sous-ensembles paramétrés par un demi-entier entier $x \in [(a + 1)/2, -(a - 1)/2]$ et un terme cuspidal, $(\otimes_{j=1,...,k}\rho_j|.|_F^{y_j})\times\pi'_{cusp}$ du module de Jacquet de π'. Les termes correspondants, écrits sous la forme

$$(\otimes_{(\rho',z')\in\mathcal{E}}\rho'|.|_F^{z'})\otimes\pi'_{cusp}$$

sont tels que le l'ensemble ordonné $\mathcal{E}$ s'obtient en mélangeant les ensembles ordonnés écrits ci-dessous sans permuter l'ordre interne à chacun de ces sous-ensembles :

$$\{\rho|.|_F^{s+i}; i\in[(a-1)/2,x]\}(\text{c'est l'ensemble vide si } x=(a+1)/2\ );$$

$$\{\check{\rho}|.|_F^{i'-s}; i'\in[(a-1)/2,-x[\}\ (\text{c'est l'ensemble vide si } x=-(a-1)/2)\ ;$$

$$\{\rho_j|.|_F^{y_j}; j=1,...,k\}.$$

Ainsi les a premiers exposants d'un tel terme, écrits z'_i pour $i=1,...,a$ se décomposent en a_1 termes du premier ensemble, a_2 termes du deuxième et a_3 termes du troisième. Donc on a :

$$\sum_{i=1,\dots,a} z'_i=\sum_{\ell\in[(a-1)/2,(a+1)/2-a_1]}(s+\ell)+\sum_{\ell\in[(a-1)/2,(a+1)/2-a_2]}(-s+\ell)+\sum_{j=1,\dots,a_3} y_j.$$

Puisque π' est une représentation tempérée, on a sûrement $\sum_{j=1,\dots,a_3} y_j\geq 0$ et donc

$$\sum_{i=1,\dots,a} z'_i\geq a_1s-a_2s\geq -a_2s.$$

Pour le terme considéré du module de Jacquet de π, cette somme vaut $-as$. Comme $a_2\leq a$, on doit avoir égalité $a_2=v$, d'où $a_1=a_3=0$. Notons P le sous-groupe parabolique qui sert à définir l'induite $\sigma|.|_F^s\times\pi'$. Les termes du module de Jacquet de l'induite $\sigma|.|_F^s\times\pi'$ qui vérifient les conditions précédentes sont ceux qui proviennent du sous-quotient $\check{\sigma}|.|_F^{-s}\otimes\pi'$ du module de Jacquet $(\sigma|.|_F^s\times\pi')_P$. Ils n'interviennent que dans le quotient de Langlands de notre induite. Donc π est ce quotient de Langlands. Cela démontre la première assertion de l'énoncé. Sous l'hypothèse de la seconde assertion, l'unique sous-module irréductible de $\sigma|.|_F^s\times\pi'$ est le quotient de Langlands d'après ce que l'on vient de prouver. Puisque l'unique sous-module irréductible et aussi l'unique quotient irréductible, la représentation est irréductible. □

2.6 Induction et L-paquets tempérés

Ci-dessous, on utilise à plusieurs reprises la remarque élémentaire suivante. Soit x un nombre réel non nul et ρ une représentation irréductible cuspidale et unitaire d'un groupe linéaire. Soient aussi $m\geq 1$ un entier et σ une représentation de $G(F)$. On suppose qu'il n'existe pas d'inclusion de la forme $\sigma\hookrightarrow\rho|.|_F^x\times\sigma'$ où σ' est une représentation quelconque. Alors l'induite $\rho|.|_F^x\times\cdots\rho|.|_F^x\times\sigma,$, où il y a m copies de $\rho|.|_F^x$, a un unique sous-module irréductible. C'est un calcul de module de Jacquet et de réciprocité de Frobenius pour le parabolique standard de sous-groupe de Levi $GL(md_\rho)\times G$. En effet, les sous-quotients irréductibles de ce module de Jacquet de la forme $\tau\otimes\tau'$ vérifient soit que le support cuspidal de τ n'est pas m copies de $\rho|.|_F^x$, soit que τ est l'induite irréductible $\rho|.|_F^x\times\cdots\times\rho|.|_F^x$. Dans ce dernier cas, on a nécessairement $\tau'\simeq\sigma$ et un tel terme n'intervient qu'avec multiplicité au plus 1 comme sous-quotient irréductible du module de Jacquet. Par réciprocité de Frobenius, tout sous-module irréductible de l'induite écrite a son module de Jacquet qui admet $(\rho|.|_F^x\times\cdots\times\rho|.|_F^x)\otimes\sigma$ comme quotient irréductible. Comme le foncteur de Jacquet est exact, cela force l'unicité d'un tel sous-module irréductible. Remarquons que, d'après 2.1(2), l'hypothèse sur σ est vérifiée si les deux conditions suivantes le sont :

• σ est une représentation irréductible tempérée ;

• x n'est pas un demi-entier positif, ou x est un tel demi-entier mais $Jord(\sigma)$ ne contient pas $(\rho, 2x+1)$.

Lemme. *Soit Π un paquet de représentations tempérées. Soit $x > 0$ un demi-entier tel que $(\rho, 2x+1) \in Jord(\Pi)$. On note m la multiplicité de $(\rho, 2x+1)$ dans $Jord(\Pi)$ et Π^- le paquet de représentations tempérées qui se déduit de Π en remplaçant les m copies de $(\rho, 2x+1)$ par m copies de $(\rho, 2x-1)$. Pour tout $\pi^- \in \Pi^-$, on note π l'unique sous-module irréductible de l'induite $\rho|.|_F^x \times \cdots \rho|.|_F^x \times \pi^-$. Alors π est une représentation tempérée de Π et l'application ainsi définie de Π^- dans Π est une injection.*

Preuve. Soit $\pi \in \Pi$. Supposons qu'il existe une inclusion de la forme $\pi \hookrightarrow \rho|.|_F^x \times \cdots \times \rho|.|_F^x \times \sigma$, avec m copies de $\rho|.|_F^x$. On vérifie que l'on n'a certainement aucune inclusion de la forme $\sigma \hookrightarrow \rho|.|_F^x \times \sigma'$. Sinon, on aurait une inclusion $\pi \hookrightarrow \rho|.|_F^x \times \cdots \times \rho|.|_F^x \times \sigma$, avec $m+1$ copies de $\rho|.|_F^x$ et $Jord(\pi)$ contiendrait $m+1$ copies de (ρ, a), cf. 2.1(3). Les calculs de modules de Jacquet expliqués ci-dessus montrent alors que si une telle inclusion se produit avec σ que l'on suppose irréductible, tout sous-quotient irréductible du module de Jacquet de π de la forme $\rho|.|_F^x \times \cdots \rho|.|_F^x \otimes \sigma''$, où il y a m copies de $\rho|.|_F^x$, vérifie $\sigma'' \simeq \sigma$. Un peu plus généralement supposons que $\pi \in \Pi$ et que le module de Jacquet de π contient un sous-quotient irréductible de la forme $\rho|.|_F^x \times \cdots \rho|.|_F^x \otimes \sigma''$; alors quitte à changer σ'' on peut supposer que ce sous-quotient est en fait un quotient du module de Jacquet de π et, par réciprocité de Frobenius que π est un sous-module comme ci-dessus.

Quand on applique le module de Jacquet pour le parabolique $GL(md_\rho, F) \otimes G'$ (pour G' convenable) à la distribution stable formée de la somme des éléments de π et que l'on projette sur le caractère de la représentation $\rho|.|_F^x \times \cdots \times \rho|.|_F^x$ (avec m-copies), on obtient une distribution stable associée à Π^-. Ainsi d'après ce que l'on a vu ci-dessus, une représentation $\pi \in \Pi$ soit disparaît dans cette procédure, soit contribue par le caractère de σ (avec les notations ci-dessus). Ainsi nécessairement $\sigma \in \Pi^-$ et toute représentation de Π^- est obtenue par cette procédure. On a donc défini sur un sous-ensemble de Π un inverse surjectif de l'application de l'énoncé. Cela montre que cette dernière application est bien une injection de Π^- dans Π. $\square$

2.7 Propriété des représentations tempérées ayant un modèle de Whittaker

Supposons G quasi-déployé. On définit de la façon habituelle la notion de modèle de Whittaker. Il y a plusieurs types de tels modèles, autant que de classes de conjugaison d'éléments unipotents réguliers dans $G(F)$. On utilise la propriété suivante :

soit π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$; il existe une unique représentation tempérée irréductible π_0 de $G(F)$ ayant un modèle de Whittaker d'un type fixé et telle que $Jord(\pi_0) = Jord(\pi)$.

Cf. [K] théorème 3.4, [W1] théorème 4.9.

Lemme. *Supposons G quasi-déployé, soit π une représentation irréductible de $G(F)$ ayant un modèle de Whittaker. On suppose que le support cuspidal étendu de π est celui d'une représentation tempérée. Alors π est tempérée.*

Preuve. On démontre ce lemme par récurrence sur le rang de G et pour cela on a besoin d'une conséquence du lemme. Pour fixer les notations, on note Π un paquet de représentations tempérées et on suppose que le support cuspidal étendu de π est le même que celui des éléments de Π. Le lemme dit alors que π appartient à Π. Ceci montre que le support cuspidal ordinaire de π est bien déterminé. On peut décrire ce support cuspidal. En effet, notons φ le morphisme de W_{DF} dans le L-groupe de G paramétrisant Π. Notons φ_L le morphisme de W_{DF} dans ce L-groupe qui est trivial sur $SL(2,\mathbb{C})$ et qui, sur W_F, est le composé de l'inclusion : $W_F \hookrightarrow W_{DF} = W_F \times SL(2,\mathbb{C}); w \mapsto \left(w, \begin{pmatrix} |w|_F^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|_F^{-1/2} \end{pmatrix}\right)$ avec φ. Ainsi φ_L détermine un paquet de Langlands assez particulier. Le support cuspidal étendu de tout élément de ce paquet est le même que celui des éléments de Π. Il existe exactement une représentation de ce paquet qui soit le quotient de Langlands d'une induite ayant un modèle de Whittaker. Notons π_0 le sous-quotient irréductible de cette induite ayant un modèle de Whittaker. Le lemme dit que π_0 est tempérée et isomorphe à π. On pourrait montrer que $\pi = \pi_0$ est la représentation duale au sens d'Aubert, Schneider-Stuhler du quotient de Langlands. Ce qui nous importe est que si π est cuspidal, alors $\varphi^L = \varphi$, donc $Jord(\pi)$ est un ensemble de couples $(\rho, 1)$.

Prouvons le lemme. On fixe π comme dans l'énoncé et Π comme ci-dessus. Si π est cuspidale, elle est a fortiori tempérée, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on écrit π comme sous-module d'une induite de représentations cuspidales

$$\pi \hookrightarrow (\times_{i=1,\ldots,v} \rho_i |.|_F^{s_i}) \times \pi_{cusp}, \tag{1}$$

où π_{cusp} est une représentation irréductible cuspidale d'un groupe de même type que G, $v \geq 1$ est un entier et, pour tout $i = 1, \ldots, v$, ρ_i est une représentation cuspidale unitaire irréductible d'un groupe linéaire et s_i est un nombre réel. Comme π_{cusp} a nécessairement un modèle de Whittaker et est une représentation d'un groupe de rang plus petit que G, on sait, par récurrence, que $Jord(\pi_{cusp})$ est un ensemble de couples $(\rho, 1)$. Puisque π_{cusp} est de la série discrète, cet ensemble est sans multiplicités et pour tout $(\rho, 1)$ y intervenant, $(\rho, 1)$ est de bonne parité, en particulier ρ est autodual.

Soit $(\rho, a) \in Jord(\Pi)$. On suppose d'abord que ρ n'est pas autoduale. Ainsi $(\check{\rho}, a) \in Jord(\Pi)$ et il existe un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\{1, \ldots, v\}$ tel que $\cup_{i\in\mathcal{E}}\{\rho_i|.|_F^{s_i}, \check{\rho}_i|.|_F^{-s_i}\} = \cup_{x\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]}\{\rho|.|_F^x, \check{\rho}|.|_F^x\}$. Un tel ensemble n'est pas unique, en général, et on en fixe un. Ainsi π est certainement un sous-quotient irréductible de l'induite :

$$(\times_{x\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]}\rho|.|_F^x) \times (\times_{i=1,\ldots,v; i\notin\mathcal{E}}\rho_i|.|_F^{s_i}) \times \pi_{cusp}.$$

Il existe donc un sous-quotient irréductible σ de l'induite $\times_{x\in[(a-1)/2,-(a-1)/2]}\rho|.|_F^x$ et un sous-quotient irréductible π' de l'induite $(\times_{i=1,\ldots,v; i\notin\mathcal{E}}\rho_i|.|_F^{s_i}) \times \pi_{cusp}$ tel que π soit un sous-quotient irréductible de l'induite $\sigma \times \pi'$. Nécessairement σ a un modèle de Whittaker au sens usuel et π' en a un du même type que π. Ainsi $\sigma \simeq < (a-1)/2, -(a-1)/2 >_\rho$. En fait, on connaît aussi π'. En effet le support cuspidal étendu de l'induite $(\times_{i=1,\ldots,v; i\notin\mathcal{E}}\rho_i|.|_F^{s_i}) \times \pi_{cusp}$ est celui des représentations tempérées dans le paquet Π', qui se déduit de Π en enlevant (ρ, a) et $(\check{\rho}, a)$. En appliquant le lemme par récurrence, on sait que π' est une représentation tempérée. Il en est donc de même de tout sous-quotient de $\sigma \times \pi'$, donc π est tempérée. Cela prouve le lemme dans ce cas.

Supposons maintenant que $Jord(\Pi)$ contient un élément (ρ, a) tel que ρ soit auto-duale, avec une multiplicité notée m vérifiant l'une des conditions suivantes :

• $m > 2$;

• $m = 2$ et a est pair ;

• $m = 2$ et a est impair mais $(\rho, 1)$ n'intervient pas dans $Jord(\pi_{cusp})$.

Ces conditions sont par exemple automatiques si (ρ, a) est de mauvaise parité. Alors $\mathcal{E}$ comme ci-dessus existe encore et π' défini comme ci-dessus a encore son support cuspidal étendu qui se déduit de celui de π en enlevant deux copies de (ρ, a). On conclut comme ci-dessus.

D'autre part, si $a = 1$ pour tout $(\rho, a) \in Jord(\Pi)$, les s_i sont tous nuls et σ est certainement une représentation tempérée d'après l'inclusion (1). Il nous suffit donc maintenant de démontrer le lemme dans le cas où $Jord(\Pi)$ contient un élément (ρ, a) de bonne parité avec $a \geq 2$. On peut se limiter au cas où la multiplicité de (ρ, a) est inférieure ou égale à 2. On fixe un tel (ρ, a) et on suppose que a est maximal avec cette propriété.

On fait d'abord la démonstration dans le cas où la multiplicité de (ρ, a) dans $Jord(\pi)$ est 1 pour clarifier la méthode. On fixe une inclusion (1) et on sait qu'il existe $i_0 \in \{1, ..., v\}$ tel que $\rho_{i_0}|.|_F^{s_{i_0}} \simeq \rho|.|_F^{\zeta(a-1)/2}$ pour un signe convenable ζ. On fixe une telle inclusion avec l'hypothèse supplémentaire que pour tous les choix possibles, i_0 est minimum. On suppose d'abord que $i_0 = 1$ et on conclut : il existe un sous-quotient π' de l'induite $(\times_{i=2,...,v}\rho_i|.|_F^{s_i}) \times \pi_{cusp}$ tel que π soit un sous-module irréductible de l'induite $\rho|.|_F^{\zeta(a-1)/2} \times \pi'$. Le support cuspidal étendu de π' est celui des représentations tempérées dans le paquet qui se déduit de Π en remplaçant (ρ, a) par $(\rho, a-2)$. De plus π' admet un modèle de Whittaker. Par l'hypothèse de récurrence, on sait que π' est tempérée. Ainsi si $\zeta = +$, π est un sous-module irréductible de l'induite $\rho|.|_F^{(a-1)/2} \times \pi'$. On applique le lemme 2.6 avec ici $m = 1$, $\pi^- = \pi'$. Ce lemme nous dit que π appartient à Π, donc est une représentation tempérée. Considérons le cas où $\zeta = -$. Sous cette hypothèse, π est le sous-module de Langlands de l'induite $\rho|.|_F^{-(a-1)/2} \times \pi'$. Comme π a un modèle de Whittaker, le théorème 1.1 de [Mu] montre que cette induite est irréductible et π est donc aussi un sous-module irréductible de l'induite $\rho|.|_F^{(a-1)/2} \times \pi'$. On conclut comme précédemment. Au passage d'ailleurs cette conclusion montre que l'induite ne peut pas être irréductible et que ce cas ne peut se produire.

Il suffit donc de démontrer que $i_0 = 1$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi mais que $\zeta = +$. Dans ce cas $\rho_{i_0-1}|.|_F^{s_{i_0-1}} \times \rho|.|_F^{(a-1)/2}$ est soit irréductible soit de longueur deux. Dans le premier cas on peut commuter les facteurs ce qui contredit la minimalité de i_0. Dans le deuxième cas, $\rho_{i_0-1}|.|_F^{s_{i_0-1}} \simeq \rho|.|_F^{(a-3)/2}$ et on peut remplacer $\rho|.|_F^{(a-3)/2} \times \rho|.|_F^{(a-1)/2}$ par son unique sous-quotient ayant un modèle de Whittaker. Ce sous-quotient est $< (a-1)/2, (a-3)/2 >_\rho$. Or $< (a-1)/2, (a-3)/2 >_\rho \hookrightarrow \rho|.|_F^{(a-1)/2} \times \rho|.|_F^{(a-3)/2}$ et on peut donc encore échanger i_0 et $i_0 - 1$ ce qui contredit la minimalité de i_0. Donc si $\zeta = +$, $i_0 = 1$.

On suppose que $\zeta = -$. Ici la deuxième partie de l'argument ci-dessus est différente. On peut remplacer $\rho|.|_F^{-(a-3)/2} \times \rho|.|_F^{-(a-1)/2}$ par $< -(a-3)/2, -(a-1)/2 >_\rho$. En procédant ainsi de proche ne proche, on montre qu'il existe un segment décroissant $[e, -(a-1)/2]$ et une inclusion

$$\pi \hookrightarrow < e, -(a-1)/2 >_\rho \times \pi', \tag{2}$$

où π' est une représentation irréductible convenable. On va montrer que nécessairement

$e=(a-3)/2$. De (1) on tire que π est un sous-quotient irréductible de l'induite $\rho|.|_F^{(a-1)/2}\times \pi_1$ où π_1 a pour support cuspidal étendu celui de π où on a remplacé (ρ,a) par $(\rho,a-2)$. Comme π_1 a nécessairement un modèle de Whittaker, π_1 est tempérée. On sait calculer les modules de Jacquet de l'induite $\rho|.|_F^{(a-1)/2}\times\pi_1$. On voit que (2) force l'existence d'une inclusion :

$$\pi_1 \hookrightarrow \times_{j\in[e,-(a-3)/2]}\rho|.|_F^j \times \pi_2,$$

où π_2 ne nous intéresse pas. Comme π_1 est une représentation tempérée, nécessairement $e=(a-3)/2$ comme annoncé. Le support cuspidal étendu de π_1 contient donc

$$\cup_{x\in[(a-3)/2,-(a-3)/2}\{\rho|.|_F^x\}$$

avec multiplicité au moins 2. Ceci est donc aussi vrai pour le support cuspidal de π et il existe des entiers b,b' supérieurs ou égaux à $a-2$ tel que (ρ,b) et (ρ,b') soient dans $Jord(\Pi)$. Par maximalité de a, on a $b,b'\leq a$ et comme (ρ,a) n'intervient qu'avec multiplicité 1 dans $Jord(\Pi)$, l'un des deux vaut $a-2$. Ainsi $Jord(\Pi)$ contient (ρ,a) et $(\rho,a-2)$ et le support cuspidal étendu de π' se déduit de celui de $Jord(\pi)$ en enlevant (ρ,a) et $(\rho,a-2)$. On applique l'hypothèse de récurrence à π' qui a nécessairement un modèle de Whittaker et on sait que π' est tempérée. Ainsi π est le sous-module de Langlands de l'induite $<(a-3)/2,-(a-1)/2>_\rho\times\pi'$. D'après [Mu] thorme 1.1, cette induite doit être irréductible, elle est donc isomorphe à $<(a-1)/2,-(a-3)/2>_\rho\times\pi'$ on trouve encore une inclusion avec $i_0=1$ ce qui contredit la minimalité de i_0.

Il nous reste donc à voir le cas où la multiplicité de (ρ,a) dans $Jord(\pi)$ est égale à 2. On procède comme ci-dessus mais ici, i_0 et remplacé par $i_1<i_2$ où pour $j=1,2$, il existe un signe ζ_j tel que $\rho_{i_j}|.|_F^{s_{i_j}}=\rho|.|_F^{\zeta_j(a-1)/2}$. On fixe une telle inclusion. En procédant comme ci-dessus, on pousse d'abord vers la gauche les $\rho|.|_F^{\zeta_{i_j}(a-1)/2}$ où $\zeta_j=+$. Puis on pousse les autres. On montre que pour tout $j=1,2$ tel que $\zeta_j=-$, il existe un demi-entier e_j tel que $[e_j,\zeta_j(a-1)/2]$ soit un segment décroissant et une inclusion

$$\pi\hookrightarrow(\times_{j=1,2;\zeta_j=+}\rho|.|_F^{(a-1)/2})\times(\times_{j=1,2;\zeta_j=-}<e_j,\zeta_j(a-1)/2>_\rho)\times\pi',$$

pour π' irréductible convenable. Comme ci-dessus on vérifie que ou bien $\zeta_j=+$, ou bien $e_j\geq(a-3)/2$ et que l'égalité est nécessaire par maximalité de a (ici on utilise le fait que l'on a déjà poussé tous les $\rho|.|_F^{(a-1)/2}$ en première position). On note m_+ le nombre de $j=1,2$ tels que $\zeta_j=+$ et $m_-=2-m_+$. On pose

$$\tau=\rho|.|_F^{(a-1)/2}\times\ldots\times\rho|.|_F^{(a-1)/2}\times<(a-3)/2,-(a-1)/2>_\rho\times\ldots\times<(a-3)/2,-(a-1)/2>_\rho,$$

avec m_+ copies de la première représentation et m_- copies de la seconde. Ainsi π' est une représentation irréductible ayant un modèle de Whittaker et dont le support cuspidal étendu s'obtient à partir $Jord(\Pi)$ en enlevant le support cuspidal de τ et celui de $\check{\tau}$. Autrement dit, le support cuspidal étendu de π' s'obtient en remplaçant d'abord dans $Jord(\Pi)$ les 2 copies de (ρ,a) par 2 copies de $(\rho,a-2)$ puis en enlevant $2m_-$ copies de $(\rho,a-2)$; il se peut que $2m_->2$ mais comme dans la démonstration du cas $m=1$ cela ne gêne pas. Ainsi le support cuspidal étendu de π' est le support cuspidal d'une représentation tempérée et π' est donc une représentation tempérée. On pose $m=inf(m_+,m_-)$.

On suppose que $m\neq0$, donc $m=m_+=m_-=1$, et on remarque que l'inclusion $\pi\hookrightarrow\tau\times\pi'$ se factorise necessairement par le sous-module irréductble de τ ayant un modèle de Whittaker. Celui-ci est $< (a-1)/2, -(a-1)/2 >_\rho$. La représentation π' a pour support cuspidal étendu celui de π dont on a enlevé les deux copies de (ρ, a). C'est donc bien le support cuspidal étendu d'une représentation tempérée et par hypothèse de récurrence, on sait que π' est tempérée. Ainsi π est un sous-module d'une représentation induite tempérée et est donc tempérée.

On suppose donc que $m = 0$. On a donc soit $m_+ = 2$ et $m_- = 0$, soit $m_- = 2$ et $m_+ = 0$. Dans le cas où $m_+ = 2$, on sait que π est une représentation tempérée en appliquant le lemme 2.6. Si $m_- = 2$, on sait que π est le sous-module de Langlands de l'induite $\tau \times \pi'$. Cette induite est donc irréductible d'après [Mu] thorme 1.1. D'où encore

$$\pi \simeq \check{\tau} \times \pi'$$

$$\hookrightarrow \rho|.|_F^{(a-1)/2} \times \rho|.|_F^{(a-1)/2} \times < (a-3)/2, -(a-3)/2 >_\rho \times < (a-3)/2, -(a-3)/2 >_\rho \times \pi'.$$

On trouve encore une inclusion

$$\pi \hookrightarrow \rho|.|_F^{(a-1)/2} \times \rho|.|_F^{(a-1)/2} \times \pi'',$$

où π'' est une représentation tempérée. L'ensemble $Jord(\pi'')$ se déduit de $Jord(\Pi)$ en remplaçant les 2 copies de (ρ, a) par 2 copies de $(\rho, a-2)$. En particulier $Jord(\pi'')$ ne contient pas (ρ, a) et contient au moins 2 copies de $(\rho, a-2)$ (on peut avoir $a = 2$ bien que le cas où a est pair ait déjà été démontré). Il suffit d'appliquer le lemme 2.6 pour conclure que σ est une représentation tempérée. Cela termine la preuve. $\square$

2.8 Définition des points de réductibilité possible pour une représentation tempérée

Soit π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$. On note $RP(\pi)$ (pour "réductibilité possible") l'ensemble des couples (ρ, x), où ρ une représentation irréductible cuspidale unitaire d'un groupe linéaire et x un nombre réel, tel que :

• $\rho|.|_F^x \times \pi$ ait pour support cuspidal étendu le support cuspidal d'une représentation tempérée de $GL(\hat{d}_G + 2d_\rho, F)$;

• de plus, si $x = 0$, $(\rho, 1)$ est de bonne parité mais n'appartient pas à $Jord(\pi)$.

Ce sont exactement les couples décrits dans la remarque 2.3 sauf quand $x = 0$ où on a restreint les possibilités. Remarquons que, pour $(\rho, x) \in RP(\pi)$, on a $\check{\rho} = \rho$ et $(\rho, -x) \in RP(\pi)$.

Proposition. *Soient π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$, ρ une représentation cuspidale unitaire irréductible d'un groupe linéaire et x un réel non nul. On suppose que $(\rho, x) \notin RP(\pi)$. Alors l'induite $\rho|.|_F^x \times \pi$ est irréductible.*

Preuve. Le cas $x = 0$ résulte de la classification des représentations tempérées. Dans tout ce qui suit, on suppose $x \neq 0$ et, par symétrie, on peut supposer $x > 0$.

On appelle série discrète strictement positive une série discrète telle que tous les termes de son module de Jacquet cuspidal soient de la forme $(\otimes_{i=1,\dots,v} \rho_i|.|_F^{s_i}) \otimes \pi_{cusp}$ où π_{cusp} est une représentation irréductible cuspidale d'un groupe de même type que G, v est un entier convenable et, pour $i = 1, \dots, v$, ρ_i est une représentation irréductiible cuspidale unitaire d'un groupe linéaire et s_i est un réel strictement positif. Remarquons que les s_i sont forcément des demi-entiers.

On suppose d'abord que π est une série discrète strictement positive. On va alors montrer la propriété suivante : l'induite $\rho|.|_F^x \times \pi$ est irréductible ou elle contient un sous-quotient irréductible qui est une représentation tempérée. En effet, soit σ un sous-quotient irréductible de l'induite $\rho|.|_F^x \times \pi$.

On regarde les termes d'un module de Jacquet cuspidal de σ c'est-à-dire les inclusions

$$\sigma \hookrightarrow (\times_{i=1,\dots,v+1}\rho_i|.|_F^{s_i}) \times \pi_{cusp}. \tag{1}$$

D'après la propriété de positivité de π tous les s_i qui interviennent sont strictement positifs sauf éventuellement un, pour $i = i_0$ disons, tel que $\rho_{i_0} \simeq \check{\rho}$ et $s_{i_0} = -x$. Si $i_0 = 1$, alors σ est le quotient de Langlands de l'induite $\rho|.|_F^x \times \pi$ d'après le lemme 2.5. Supposons que $i_0 > 1$ et supposons d'abord que $x \neq 1/2$. Cette hypothèse assure que, pour tout $i = 1 ... i_0 - 1$, les induites $\rho_i|.|_F^{s_i} \times \check{\rho}|.|_F^{-x}$ sont irréductibles car $s_i \in 1/2\mathbb{N}$ et $s_i + x$ est un nombre réel positif qui n'est pas 1. Ainsi l'inclusion ci-dessus donne une inclusion analogue mais où $\check{\rho}|.|_F^{-x}$ a été poussé à la première place. Dans ce cas σ est le quotient de Langlands. Donc si $x \neq 1/2$, σ est soit une série discrète positive soit est le quotient de Langlands. Ainsi si l'induite $\rho|.|_F^x \times \pi$ est réductible, elle contient un sous-quotient qui est une série discrète et $x \in RP(\pi)$ comme annoncé.

Le cas où $x = 1/2$ est de même nature ; on ne peut pas "pousser" $\check{\rho}|.|_F^{-1/2}$ à la première place s'il existe $i = 1, ..., i_0 - 1$ tel que $\rho_i \simeq \check{\rho}$ et $s_i = 1/2$. Mais dans ce cas, le terme du module de Jacquet que l'on considère vérifie la propriété de positivité large qui caractérise les représentations tempérées. Donc ici, soit σ est une représentation tempérée soit σ est le quotient de Langlands de l'induite $\rho|.|_F^x \times \pi$. Et on conclut comme ci-dessus.

On suppose maintenant que π est une représentation tempérée quelconque et on prouve la proposition par récurrence sur le rang de G. On suppose que $x \notin RP(\pi)$ et on montre que l'induite $\rho|.|_F^x \times \pi$ est irréductible.

On suppose que π n'est pas une série discrète strictement positive puisque ce cas a déjà été vu. Alors il existe :

- une représentation irréductible cuspidale unitaire ρ_0 d'un groupe linéaire ;
- un segment $[e_0, f_0]$ formé de demi-entiers tel que $e_0 \geq 0 \geq f_0$;
- une représentation irréductible tempérée π' d'un groupe de même type que G ;

de sorte que l'on ait une inclusion :

$$\pi \hookrightarrow < e_0, f_0 >_{\rho_0} \times \pi'.$$

Si π n'est pas de la série discrète, cela résulte de 2.2(1). Si π est de la série discrète, c'est le lemme 3.1 de [M2]. Si $\rho_0 \not\simeq \check{\rho}_0$ nécessairement $e_0 = -f_0$ et d'après le lemme 1.4 :

$$RP(\pi) = \begin{cases} RP(\pi') \cup (\rho_0, e_0 + 1) \cup (\rho_0, -f_0 + 1) \text{ si } \rho_0 \simeq \check{\rho}_0, \\ RP(\pi') \cup (\rho_0, e_0 + 1) \cup (\check{\rho}_0, e_0 + 1) \text{ si } \rho_0 \not\simeq \check{\rho}_0. \end{cases}$$

Ainsi si $(\rho, x) \notin RP(\pi)$, l'induite $\rho|.|_F^x \times < e_0, f_0 >_{\rho_0}$ est irréductible car soit $\rho \not\simeq \rho_0$, soit $\rho \simeq \rho_0$ et $x \neq d_0 + 1$, (on rappelle que $x > 0$ ce qui force $x \neq f_0 - 1$). De même soit $\rho \not\simeq \check{\rho}_0$, soit $\rho \simeq \check{\rho}_0$ et $x \neq -f_0 + 1$, d'où l'irréductibilité de l'induite $< -f_0, -e_0 >_{\check{\rho}_0} \times \rho|.|_F^x$ et par dualité celle de $< e_0, f_0 >_{\rho_0} \times \check{\rho}|.|_F^{-x}$. Comme $x \notin RP(\pi')$, par l'hypothèse de récurrence, on sait aussi que $\rho|.|_F^x \times \pi'$ est irréductible. On a donc une suite de morphismes :

$$\rho|.|_F^x \times \pi \hookrightarrow \rho|.|_F^x \times < e_0, f_0 >_{\rho_0} \times \pi' \simeq < e_0, f_0 >_{\rho_0} \times \rho|.|_F^x \times \pi'$$
$$\simeq < e_0, f_0 >_{\rho_0} \times \check{\rho}|.|_F^{-x} \times \pi' \simeq \check{\rho}|.|_F^{-x} \times < e_0, f_0 >_{\rho_0} \times \pi'.$$

L'irréductibilité cherchée résulte alors du lemme 2.5 et cela termine la preuve. $\square$

2.9 Réductibilité et généricité

Lemme. *Soit ρ une représentation irréductible d'un groupe linéaire, que l'on suppose cuspidale, unitaire et autoduale. Soient e, f des demi-entiers tels que $e \geq 0$ et $e+f \neq 0$. On suppose que $(\rho, 2e+1)$ et $(\rho, 2|f|+1)$ ont la bonne parité. Supposons G quasi-déployé, soit π une représentation tempérée de $G(F)$, irréductible, ayant un modèle de Whittaker. Alors*

(i) si $f \leq 0$, l'induite $< e, f >_\rho \times\pi$ est réductible ;

(ii) supposons que $f > 0$ et que $(\rho, f) \in RP(\pi)$; alors l'induite $< e, f >_\rho \times\pi$ est réductible.

Preuve. Les hypothèses de (i) comme de (ii) assurent que tout sous-quotient irréductible de l'induite écrite a même support cuspidal étendu qu'une représentation tempérée π' : dans le cas (i), $Jord(\pi') = Jord(\pi) \cup \{(\rho, 2d+1), (\rho, -2f+1)\}$ et dans le cas (ii), $Jord(\pi')$ se déduit de $Jord(\pi)$ en remplaçant $(\rho, 2f-1)$ par $(\rho, 2d+1)$. Or ces induites ont un sous-quotient irréductible ayant un modèle de Whittaker. On applique alors le lemme 2.7 pour montrer que ce sous-quotient irréductible est tempéré. Puisque l'induite n'est pas tempérée, elle est réductible. □

2.10 La notion de liaison

On fixe une représentation irréductible cuspidale et unitaire ρ d'un groupe linéaire et un segment $[e, f]$ de nombres réels. Soit π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$. On dit que (ρ, e, f) et $Jord(\pi)$ sont liés si les conditions suivantes sont satisfaites :

e est un demi-entier et

(1) si $(\rho, 2|e|+1)$ n'est pas de bonne parité, il existe un entier $a \geq 1$ de même parité que $2e+1$ tel que $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ et les segments $[e, f]$ et $[(a-1)/2, -(a-1)/2]$ sont liés au sens de Zelevinsky ;

(2) si $(\rho, 2|e|+1)$ est de bonne parité, alors soit $e \geq -1/2$ et $f \leq 1/2$, soit il existe $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ avec $(a+1)/2 \in [d, f] \cup [-f, -d]$.

La notion de liaison ne dépend que de $Jord(\pi)$ et non de π. De plus, (ρ, e, f) et $Jord(\pi)$ sont liés si et seulement si $(\check{\rho}, -f, -e)$ et $Jord(\pi)$ le sont.

Proposition. *On suppose G quasi-déployé. Soit (ρ, e, f) comme ci-dessus et soit π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$ ayant un modèle de Whittaker. On suppose que (ρ, e, f) et $Jord(\pi)$ sont liés et que $e+f \neq 0$. Alors l'induite $< e, f >_\rho \times\pi$ est réductible.*

Preuve. Par symétrie, on suppose $e+f > 0$, a fortiori $e > 0$. On suppose d'abord que (ρ, e, f) satisfait la propriété (1) de la condition de liaison. On fixe a comme dans cette propriété ; comme (ρ, a) n'a pas bonne parité (puisque $(\rho, 2e+1)$ ne l'a pas) π est une induite de la forme $< (a-1)/2, -(a-1)/2 >_\rho \times\pi'$, où π' est une représentation irréductible tempérée convenable. On a donc un isomorphisme :

$$< e, f >_\rho \times\pi \simeq < e, f >_\rho \times < (a-1)/2, -(a-1)/2 >_\rho \times\pi'.$$

Or l'induite $< e, f >_\rho \times < (a-1)/2, -(a-1)/2 >_\rho$ dans le GL convenable n'est pas irréductible d'où la réductibilité de l'induite de gauche comme annoncé. Ici on n'a d'ailleurs pas utilisé le fait que π a un modèle de Whittaker.

On suppose que c'est (2) de la définition de la liaison qui est satisfait. En particulier $(\rho, 2e+1)$ et $(\rho, 2|f|+1)$ sont de bonne parité. Si $f \leq 1/2$ le lemme 2.9 montre que l'induite est réductible. On suppose donc que $f > 1/2$ et qu'il existe un entier $a \geq 1$ tel que $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ et $(a+1)/2 \in [e, f]$. On note σ le sous quotient irréductible de l'induite $< e, f >_\rho \times \pi$ ayant un modèle de Whittaker. Ainsi σ est aussi un sous-quotient irréductible de l'induite

$$< (a-1)/2, f >_\rho \times < e, (a+1)/2 >_\rho \times \pi.$$

On note π' le sous-quotient irréductible de l'induite $< e, (a+1)/2 >_\rho \times \pi$ ayant un modèle de Whittaker et on sait que π' est une représentation tempérée, cf. lemme 2.7. Ainsi σ est un sous-quotient de l'induite $< (a-1)/2, f >_\rho \times \pi'$. Si l'induite $< e, f >_\rho \times \pi$ est irréductible, elle coïncide avec σ et σ est un sous-module de l'induite $< -f, -e >_\rho \times \pi$. Donc un module de Jacquet cuspidal de σ contient un terme $\rho|.|_F^{-f} \otimes ... \otimes \rho|.|_F^{-e} \otimes ....$ On sait calculer les modules de Jacquet cuspidaux de l'induite $< (a-1)/2, f >_\rho \times \pi'$. Pour qu'ils contiennent le terme précédent, il faut nécessairement qu'il existe $x \in [-f, -e]$ tel que le module de Jacquet de π' contienne un terme de la forme $\rho|.|_F^{-x} \otimes \cdots$ car le facteur $< (a-1)/2, f >_\rho$ ne peut contribuer au mieux qu'au sous-segment $[-f, (a-1)/2]$ de $[-f, -e]$. Ceci contredit le fait que π' est tempérée et termine la preuve. $\square$

2.11 Un résultat d'irréductibilité

Lemme. *Soient (ρ, e, f) comme en 2.10 et π une représentation irréductible et tempérée de $G(F)$. On suppose que (ρ, e, f) et $Jord(\pi)$ ne sont pas liés, que $e + f \neq 0$ et que, ou bien e n'est pas un demi-entier, ou bien e est demi-entier et $(\rho, 2|e|+1)$ n'est pas de bonne parité. Alors l'induite $< e, f >_\rho \times \pi$ est irréductible.*

Preuve. On suppose, par symétrie, que $e + f > 0$. On démontre d'abord le lemme dans le cas où soit $\rho \not\simeq \check{\rho}$, soit $0 \notin [e, f]$. On gagne le fait que pour tout $x \in [e, f[$, l'induite (dans un groupe linéaire convenable)

$$< e, x >_\rho \times \check{\rho}|.|_F^{-x+1}$$

est irréductible. Supposons de plus pour le moment que π est une série discrète. Alors pour tout $x \in [e, f]$, $(\rho, x) \notin RP(\pi)$ (puisque (ρ, x) n'a pas la bonne parité) et l'induite $\rho|.|_F^x \times \pi$ est irréductible donc isomorphe à $\check{\rho}|.|_F^{-x} \times \pi$. De proche en proche, on montre alors que l'on a une inclusion

$$< e, f >_\rho \times \pi \hookrightarrow \check{\rho}|.|_F^{-f} \times \cdots \check{\rho}|.|_F^{-x+1} \times < e, x >_\rho \times \pi$$

$$\hookrightarrow \check{\rho}|.|_F^{-f} \times \cdots \times \check{\rho}|.|_F^{-e} \times \pi.$$

Et cela donne l'irréductibilité annoncée dans l'énoncé d'après le lemme 2.5.

On enlève l'hypothèse que π est une série discrète. S'il n'en est pas ainsi, π est une sous-représentation d'une induite de la forme $< (a-1)/2, -(a-1)/2 >_{\rho'} \times \pi'$, où π'

est une représentation irréductible tempérée. Il est immédiat que (ρ, e, f) et $Jord(\pi')$ ne sont pas liés car $Jord(\pi')$ est un sous-ensemble de $Jord(\pi)$. De plus puisque (ρ, e, f) et $Jord(\pi)$ ne sont pas liés, on sait que si $\rho \simeq \rho'$, les segment $[(a-1)/2, -(a-1)/2]$ et $[e, f]$ ne sont pas liés. Il en est de même si $\rho \simeq \check{\rho}'$ car si $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ alors $(\check{\rho}, a)$ aussi. Par symétrie par rapport à 0, les segments $[(a-1)/2, -(a-1)/2]$ et $[-f, -e]$ ne sont liés que si les segments $[(a-1)/2, -(a-1)/2]$ et $[e, f]$ sont liés. Ainsi l'induite $< e, f >_\rho \times < (a-1)/2, -(a-1)/2 >_{\rho'}$ est irréductible et il en est de même de l'induite $< (a-1)/2, -(a-1)/2 >_{\rho'} \times < -f, -e >_{\check{\rho}}$. On admet par récurrence, que l'induite $< e, f >_\rho \times \pi'$ est irréductible donc isomorphe à l'induite $< -f, -d >_{\check{\rho}} \times \pi'$ et on a alors une série d'isomorphismes :

$$< e, f >_\rho \times \pi \hookrightarrow < e, f >_\rho \times < (a-1)/2, -(a-1)/2 >_{\rho'} \times \pi'$$

$$\simeq < (a-1)/2, -(a-1)/2 >_{\rho'} \times < e, f >_\rho \times \pi'$$
$$\simeq < (a-1)/2, -(a-1)/2 >_{\rho'} \times < -f, -e >_{\check{\rho}} \times \pi'$$
$$\simeq < -f, -e >_{\check{\rho}} \times < (a-1)/2, -(a-1)/2 >_{\rho'} \times \pi'.$$

Et l'irréductibilité annoncée résulte du lemme 2.5.

Le cas restant est plus délicat. On suppose donc que $\rho \simeq \check{\rho}$ et que $0 \in [e, f]$, c'est-à-dire que e et f sont des entiers tels que $e \geq 0 \geq f$. Pour éviter les confusions de signes, on pose $f^+ = -f \geq 0$.

On traite d'abord le cas où π est une série discrète strictement positive. Soit σ un sous-quotient irréductible de l'induite $< e, f >_\rho \times \pi$. On va montrer que soit σ est une représentation tempérée, soit σ est le quotient de Langlands de l'induite $< e, f >_\rho \times \pi$.

On considère les termes constants cuspidaux de σ c'est-à-dire les inclusions

$$\sigma \hookrightarrow (\times_{i=1,\dots,v'} \rho'_i |.|_F^{s'_i}) \times \pi_{cusp}, \qquad (1)$$

où π_{cusp} est irréductible et cuspidale et, pour tout $i = 1, \dots, v'$, ρ'_i est une représentation irréductible cuspidale et unitaire d'un groupe linéaire et $s'_i \in \mathbb{R}$. Les termes constants cuspidaux de toute l'induite sont indexés par le choix d'un entier $x \in [e+1, -f^+]$ et d'un terme constant cuspidal pour π, c'est-à-dire d'une inclusion :

$$\pi \hookrightarrow (\times_{i=1,\dots,v} \rho_i |.|_F^{s_i}) \times \pi_{cusp}$$

et s'obtiennent en mélangeant les 3 ensembles ordonnées suivants (en gardant l'ordre dans chaque ensemble)

$$\cup_{i \in [e,x]} \{\rho |.|_F^{i}\}; \cup_{i \in [f^+, -x[} \{\rho |.|_F^{i}\}; \cup_{i=1,\dots,v} \{\rho_i |.|_F^{s_i}\}.$$

Un tel terme vérifie la condition de positivité des représentations tempérées si $x \leq f^+ + 1$. Le point est donc de démontrer que si σ contient un terme comme ci-dessus avec $x > f^+ + 1$ alors σ est le quotient de Langlands de l'induite $< e, -f^+ >_\rho \times \pi$.

On fixe donc σ et un terme comme ci-dessus avec $x > f^+ + 1$. On utilise le fait que pour tout $i = 1, \dots, v$, si $\rho_i \simeq \rho$ alors s_i est un demi-entier non entier : $(\rho, 2s_i + 1)$ doit avoir bonne parité, or e est entier et $(\rho, 2e+1)$ n'a pas bonne parité. Donc pour tout entier $y \in [e, -f^+] \cup [f^+, -e]$ et pour tout $i = 1, \dots, v$, l'induite $\rho |.|_F^{y} \times \rho_i |.|_F^{s_i}$ est irréductible. On peut donc commuter ces facteurs. De même pour tout $y \in [e, x]$ et tout $y' \in [f^+, -x[$ l'induite $\rho |.|_F^{y} \times \rho |.|_F^{y'}$ est irréductible car $y - y' \geq x - f^+ > 1$. On peut donc aussi commuter de tels facteurs et finalement l'assertion sur σ se traduit par l'existence d'une inclusion :

$$\sigma \hookrightarrow (\times_{j\in[f^+,-x]}\rho|.|_F^j) \times (\times_{i=1,\ldots,v}\rho_i|.|_F^{s_i}) \times (\times_{y\in[e,x[}\rho|.|_F^y) \times \pi_{cusp}.$$

Pour tout $y \in [e, x[$, $\rho|.|_F^y \times \pi_{cusp}$ est irréductible (proposition 2.8) et donc isomorphe à $\rho|.|_F^{-y} \times \pi_{cusp}$. D'où finalement une inclusion

$$\sigma \hookrightarrow (\times_{j\in[f^+,-x]}\rho|.|_F^j) \times (\times_{i=1,\ldots,v}\rho_i|.|_F^{s_i}) \times (\times_{y\in[x,e]}\rho|.|_F^{-y}) \times \pi_{cusp}$$

$$\simeq (\times_{j\in[f^+,-e]}\rho|.|_F^j) \times (\times_{i=1,\ldots,v}\rho_i|.|_F^{s_i}) \times \pi_{cusp}.$$

Et σ est le quotient de Langlands de l'induite comme annoncé, cf. lemme 2.5. Ainsi $< e, f >_\rho \times\pi$ a un seul sous-quotient irréductible qui n'est pas tempéré, c'est le sous-quotient de Langlands. Mais une telle induite ne peut avoir de sous-quotient irréductible qui sont des représentations tempérées car son support cuspidal étendu est l'union de celui de π avec les 2 segments $[e, -e] \cup [f^+, -f^+]$ basés sur ρ. Ceci n'est pas le support cuspidal étendu d'une représentation tempérée car $(\rho, 2e + 1)$ n'a pas bonne parité, ni d'ailleurs $(\rho, 2f^+ + 1)$, et que $e \neq f^+$ par hypothèse. D'où l'irréductibilité.

On considère maintenant une représentation irréductible tempérée π quelconque et on prouve l'irréductibilité par récurrence. Si π n'est pas une série discrète strictement positive, alors, comme on l'a dit en 2.8, il existe une représentation cuspidale ρ' (unitaire irréductible), un segment $[e', -f']$ de demi-entiers avec $e', f' \geq 0$, et une représentation irréductible tempérée π' avec une inclusion :

$$\pi \hookrightarrow < e', -f' >_{\rho'} \times\pi'.$$

De plus si $\rho' \simeq \rho$ soit $(\rho, 2e' + 1)$ et $(\rho, 2f' + 1)$ sont de bonne parité ce qui entraîne que $e' - e$ et $f' + f$ sont des demi-entiers non entiers, soit $(\rho, 2e' + 1)$ et $(\rho, 2f' + 1)$ ne sont pas de bonne parité ce qui force $e' = f'$ et, par l'hypothèse de non liaison, que les segments $[e, f]$ et $[e', -f']$ ne sont pas liés. Ainsi l'induite $< e, f >_\rho \times < e', -f' >_{\rho'}$ est irréductible. On vérifie de la même façon que l'induite et $< e', -f' >_{\rho'} \times < -f, -e >_\rho$ est irréductible. On a donc :

$$< e, f >_\rho \times\pi \hookrightarrow < e, f >_\rho \times < e', -f' >_{\rho'} \times\pi' \simeq$$

$$< e, -f' >_{\rho'} \times < e, f >_\rho \times\pi'.$$

On sait d'après le lemme 2.4 que $Jord(\pi) = Jord(\pi') \cup \{(\rho, 2e' + 1), (\rho, 2f' + 1)\}$ et ainsi (ρ, e, f) n'est pas lié à $Jord(\pi')$. Par l'hypothèse de récurrence $< e, f >_\rho \times\pi'$ est donc aussi irréductible et on a encore une inclusion

$$< e, f >_\rho \times\pi \hookrightarrow < e', -f' >_{\rho'} \times < -f, -e >_\rho \times\pi'$$

$$\simeq < -f, -e >_\rho \times < d', -f' >_{\rho'} \times\pi'.$$

Avec le lemme 2.5, cette inclusion montre l'irréductibilité de l'induite $< e, f >_\rho \times\pi$. Cela termine la preuve. □

2.12 Un second résultat d'irréductibilité

Proposition. *Soient (ρ, e, f) comme en 2.10 et π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$. On suppose que (ρ, e, f) et $Jord(\pi)$ ne sont pas liés. Alors l'induite $< e, f >_\rho \times\pi$ est irréductible.*

Preuve. En tenant compte du lemme précédent, il nous reste à voir le cas où e est demi-entier et $(\rho, 2|e|+1)$ est de bonne parité. On peut encore supposer $e+f > 0$. L'hypothèse de non liaison assure alors que $f > 1/2$ et que pour tout $x \in [e, f]$, $\rho|.|_F^x \notin RP(\pi)$. En particulier, pour un tel x, on sait que $\rho|.|_F^x \times \pi$ est irréductible (proposition 2.8), donc isomorphe à $\rho|.|_F^{-x} \times \pi$. De plus pour tous $y, y' \in [d, f]$, $y + y' \geq 2f > 1$ et les induites $\rho|.|_F^y \times \rho|.|_F^{-y'}$ sont donc aussi irréductibles. On a donc un isomorphisme :

$$(\times_{x\in[e,f]}\rho|.|_F^x) \times \pi \simeq (\times_{x\in[-f,-e]}\rho|.|_F^x) \times \pi.$$

D'où

$$< e, f >_\rho \times\pi \hookrightarrow (\times_{x\in[e,f]}\rho|.|_F^x) \times \pi \simeq (\times_{x\in[-f,-e]}\rho|.|_F^x) \times \pi.$$

Et on conclut, avec le lemme 2.5, à l'irréductibilité de l'induite. $\square$

2.13 Critère d'irréductibilité

Généralisons la notion de liaison. Soit $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i = 1, ..., k$ soit (ρ_i, e_i, f_i) un triplet formé d'une représentation irréductible ρ_i cuspidale et unitaire d'un groupe linéaire et d'un segment $[e_i, f_i]$ de nombres réels. Soit aussi π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$. On dit que $\{(\rho_i, e_i, f_i)_{i=1,...,k}\}$ et $Jord(\pi)$ ne sont pas liés si pour tout $i = 1, ..., k$, (ρ_i, e_i, f_i) et $Jord(\pi)$ ne sont pas liés et si, pour tout $j = 1, ..., k$, $j \neq i$, les induites $< e_i, f_i >_{\rho_i} \times < e_j, f_j >_{\rho_j}$ et $< e_i, f_i >_{\rho_i} \times < -f_j, -e_j >_{\check\rho_j}$ sont irréductibles.

Théorème. *Soient $\{(\rho_i, e_i, f_i)_{i=1,...,k}\}$ comme ci-dessus et π une représentation irréductible tempérée de $G(F)$. On suppose que pour tout $i = 1, ..., k$, $e_i + f_i \neq 0$.*

(i) On suppose que G est quasi-déployé et que π a un modèle de Whittaker. Alors l'induite $(\times_{i=1,...,k} < e_i, f_i >_{\rho_i}) \times \pi$ est irréductible seulement si $\{(\rho_i, e_i, f_i)_{i=1,...,k}\}$ et $Jord(\pi)$ ne sont pas liés.

(ii) On suppose que $\{(\rho_i, e_i, f_i)_{i=1,...,k}\}$ et $Jord(\pi)$ ne sont pas liés. Alors l'induite $(\times_{i=1,...,k} < e_i, f_i >_{\rho_i}) \times \pi$ est irréductible.

En d'autres termes, la condition de non liaison est nécessaire et suffisante pour avoir l'irréductibilité de l'induite si π a un modèle de Whittaker et est seulement suffisante sans cette hypothèse de modèle de Whittaker.

Preuve. Prouvons (i). On suppose que l'induite figurant dans cette assertion est irréductible. Il faut certainement que pour tout $i, j = 1, ..., k$, $i \neq j$, les induites $< e_i, f_i >_{\rho_i} \times < e_j, f_j >_{\rho_j}$ soient irréductibles. Pour un choix de $j = 1, ..., k$, l'irréductibilité de l'induite de l'assertion est aussi équivalente à l'irréductibilité de la même induite mais où on remplace $< e_j, f_j >_{\rho_j}$ par sa contragrédiente $< -f_j, -e_j >_{\check\rho_j}$; on doit donc avoir aussi l'irréductibilité pour tout $i, j = 1, ..., k$, $i \neq j$, des induites $< e_i, f_i >_{\rho_i} \times < -f_j, -e_j >_{\check\rho_j}$. De plus pour tout $i = 1, ..., k$, l'induite $< e_i, f_i >_{\rho_i} \times\pi$ doit aussi être irréductible et donc, d'après la proposition 2.10, (ρ_i, e_i, f_i) et $Jord(\pi)$ ne sont pas liés. Cela montre que les conditions de non liaison sont bien nécessaires pour avoir l'irréductibilité quand π a un modèle de Whittaker.

Prouvons (ii). On suppose que, pour tout $i = 1, ..., k$, $e_i + f_i > 0$, sinon on remplace $< e_i, f_i >_{\rho_i}$ par $< -f_i, -e_i >_{\check{\rho}_i}$.

En permutant, comme on en a le droit, on suppose aussi que $e_1 + f_1 \geq \cdots \geq e_k + f_k$. Avec ces choix, l'induite

$$(\times_{i=1,\ldots,k} < e_i, f_i >_{\rho_i}) \times \pi \tag{1}$$

a un unique quotient irréductible, σ. De plus σ intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible et l'induite

$$(\times_{i=1,\ldots,k} < -f_i, -e_i >_{\check{\rho}_i}) \times \pi \simeq (\times_{i=k,\ldots,1} < -f_i, -e_i >_{\check{\rho}_i}) \times \pi \tag{2}$$

a un unique sous-module irréductible et il est isomorphe à σ. Pour démontrer l'irréductibilité de l'induite (1), il suffit donc de montrer que (1) est un sous-module de (2) et on va même vérifier que (1) et (2) sont isomorphes. On a les isomorphismes

$$(\times_{i=1,\ldots,k} < e_i, f_i >_{\rho_i}) \times \pi \simeq (\times_{i=1,\ldots,k-1} < e_i, f_i >_{\rho_i}) \times < -f_k, -e_k >_{\check{\rho}_k} \times \pi$$

$$\simeq < -f_k, -e_k >_{\check{\rho}_k} \times (\times_{i=1,\ldots,k-1} < e_i, f_i >_{\rho_i}) \times \pi.$$

Et de proche en proche on construit donc un isomorphisme de (1) et (2). Ceci termine la preuve. □

2.14 Irréductibilité et L-paquets génériques

Soit $\underline{G}$ la forme intérieure quasi-déployée de G. Pour un L-paquet Π de représentations tempérées de $G(F)$, on note $\underline{\Pi}$ le L-paquet de représentations tempérées de $\underline{G}(F)$ qui correspond à Π, autrement dit dont le paramètre de Langlands est le même que celui de Π. On a $Jord(\Pi) = Jord(\underline{\Pi})$. Dans l'énoncé ci-dessous, l'induite désigne une représentation de $G(F)$ ou de $\underline{G}(F)$ selon que π appartient à Π ou à $\underline{\Pi}$.

Corollaire. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $i = 1, ..., k$, soit σ_i une représentation irréductible d'un groupe linéaire, unitaire et de la série discrète, et soit s_i un nombre réel non nul. Soit Π un L-paquet de représentations irréductibles tempérées de $G(F)$. Alors l'induite*

$$(\times_{i=1,\ldots,k} \sigma_i |.|_F^{s_i}) \times \pi$$

est irréductible pour tout $\pi \in \Pi \sqcup \underline{\Pi}$ si et seulement s'il existe une représentation $\pi_0 \in \underline{\Pi}$ ayant un modèle de Whittaker et tel que l'induite précédente soit irréductible pour $\pi = \pi_0$.

Preuve. Il est évident que si l'induite de l'énoncé est irréductible pour tout $\pi \in \Pi \sqcup \underline{\Pi}$, elle l'est en particulier pour $\pi = \pi_0$ ayant un modèle de Whittaker. Réciproquement on suppose que cette induite est irréductible pour une représentation $\pi = \pi_0$ ayant un modèle de Whittaker. On écrit, pour tout $i = 1, ..., k$, $\sigma_i |.|_F^{s_i}$ sour la forme $< e_i, f_i >_{\rho_i}$ et on a $s_i = e_i + f_i \neq 0$. Le (i) du théorème précédent dit que les $\{(\rho_i, e_i, f_i)_{i=1,\ldots,k}\}$ et $Jord(\Pi)$ ne sont pas liés. Le (ii) du même théorème donne alors l'irréductibilité de l'induite pour tout $\pi \in \Pi \sqcup \underline{\Pi}$. Cela termine la preuve. □

2.15 Le cas des groupes spéciaux orthogonaux pairs

On suppose que G est spécial orthogonal pair. La principale différence avec les cas symplectique et spécial orthogonal impair est que notre notation simplifiée $\sigma_1 \times ... \times \sigma_m \times \pi$ pour les induites est trop imprécise car d'une part, il peut y avoir deux sous-groupes paraboliques non conjugués de même Lévi $GL(d_1) \times ... \times GL(d_t) \times G'$, d'autre part, l'identification du groupe central G' n'est canonique qu'à conjugaison près par un élément du groupe orthogonal tout entier (ce qui fait que selon l'identification choisie, π est remplacé par π^w). On peut remédier à cela de la façon suivante. Fixons une décomposition

$$V = Fv_1 \oplus ... \oplus Fv_t \oplus V_{an} \oplus Fv_{-t} \oplus ... \oplus Fv_{-1}$$

de sorte que

• les vecteurs v_i sont isotropes et $q(v_i, v_{-i}) = 1$ pour $i = \pm 1, ..., \pm t$;

• les espaces $Fv_1 \oplus Fv_{-1}$,..., $Fv_t \oplus Fv_{-t}$ et V_{an} sont deux à deux orthogonaux ;

• la restriction de q à V_{an} est anisotrope.

Appelons famille parabolique une famille $(I_j)_{j=1,...,m}$ vérifiant les conditions suivantes :

• chaque I_j est un sous-ensemble non vide de $\{\pm 1, ..., \pm t\}$;

• en posant $\check{I}_j = \{-i; i \in I_j\}$, les ensembles I_1,...,I_m, $\check{I}_1$,...,$\check{I}_m$ sont deux à deux disjoints.

Pour une telle famille et pour $j = 1, ..., t$, notons X_j le sous-espace de V engendré par les vecteurs v_i pour $i \in \cup_{k=1,...,j} I_k$. Notons $P_{I_1,...,I_m}$ le sous-groupe parabolique de G formé des éléments qui conservent le drapeau de sous-espaces

$$X_1 \subset X_2 \subset ... \subset X_m.$$

La composante de Lévi de $P_{I_1,...,I_m}$ s'identifie à $GL(d_1) \times ... \times GL_{d_m} \times G'$ où, pour tout j, d_j est le nombre d'éléments de I_j et G' est le groupe spécial orthogonal du sous-espace de V engendré par V_{an} et les v_i pour $i \notin \bigcup_{j=1,...,m}(I_j \cup \check{I}_j)$. Cette identification est canonique (à automorphismes intérieurs près pour les blocs $GL(d_j)$, mais cela n'a pas d'importance). Supposons d'abord $V_{an} \neq \{0\}$. Alors l'application qui, à une famille parabolique $(I_j)_{j=1,...,m}$, associe $P_{I_1,...,I_m}$ est injective. La classe de conjugaison de ce parabolique est déterminée par la suite d'entiers $d_1, ..., d_m$. Supposons maintenant $V_{an} = \{0\}$. L'application n'est plus injective. Le défaut d'injectivité est le suivant. Considérons une famille parabolique $(I_j)_{j=1,...,m}$ telle qu'il existe $i_0 \in \{1, ..., t\}$ de sorte que

$$(\bigcup_{j=1,...,m} (I_j \cup \check{I}_j)) = \{\pm 1, ..., \pm t\} \setminus \{i_0, -i_0\}.$$

On peut compléter cette famille en deux autres, en lui ajoutant un élément I_{m+1} égal soit à $\{i_0\}$, soit à $\{-i_0\}$. On a

$$P_{I_1,...,I_m} = P_{I_1,...,I_m,\{i_0\}} = P_{I_1,...,I_m,\{-i_0\}}.$$

Remarquons que les Lévi de ces paraboliques ne sont pas exactement les mêmes. Le premier a un bloc central G' qui est un groupe $SO(2)$ déployé, les deux autres n'ont pas de bloc central, mais ont un facteur $GL(1)$ supplémentaire. Cela correspond aux deux identifications possibles de $SO(2)$ déployé avec $GL(1)$. Par ailleurs, la suite $d_1, ..., d_m$ ne détermine plus toujours la classe de conjugaison du parabolique.

Dans les constructions des paragraphes précédents, il convient maintenant, à chaque fois que l'on se donne une induite $\sigma_1 \times ... \times \sigma_m \times \pi$, de fixer auparavant une famille parabolique $(I_j)_{j=1,...,m}$ et de préciser que l'induite est $Ind_{P_{I_1,...,I_m}}^G(\sigma_1 \otimes ... \otimes \sigma_m \otimes \pi)$. Au cours d'une démonstration, la famille parabolique peut changer. Par exemple, dans le cas où $m = 2$, dire que l'on peut permuter σ_1 et σ_2 signifie que l'on a

$$Ind_{P_{I_1,I_2}}^G(\sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \pi) = Ind_{P_{I_2,I_1}}^G(\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \pi).$$

De même, quand $Ind_{P_{I_1}}^G(\sigma \otimes \pi)$ admet un quotient de Langlands, celui-ci est une sous-représentation de $Ind_{P_{\check{I}_1}}^G(\check{\sigma} \otimes \pi)$.

Comme on le voit, le groupe $SO(2)$ déployé peut intervenir dans nos raisonnements. Il convient de considérer que, pour ce groupe, aucune représentation n'est de la série discrète, a fortiori aucune n'est cuspidale. Les représentations tempérées π sont les caractères unitaires. Pour une telle représentation, on a $Jord(\pi) = \{\rho, \rho^{-1}\}$, où ρ est un caractère unitaire de $GL(1, F)$. L'élément ρ a bonne parité si et seulement si $\rho = \rho^{-1}$, c'est-à-dire ρ est un caractère quadratique.

Certains raisonnements utilisent la caractérisation des représentations tempérées par la positivité de leurs exposants cuspidaux. La notion de positivité est a priori différente pour un groupe spécial orthogonal pair de ce qu'elle est pour un groupe symplectique ou spécial orthogonal impair. Par exemple, pour un exposant cuspidal $(b_1, ..., b_t)$ relatif à un sous-groupe parabolique minimal, la condition de positivité s'exprime par les inégalités

$$b_1 \geq 0,\ b_1 + b_2 \geq 0, ..., b_1 + ... + b_t \geq 0 \tag{1}$$

dans les cas symplectique ou spécial orthogonal impair, tandis qu'il faut ajouter la condition

$$b_1 + ... + b_{t-1} - b_t \geq 0 \tag{2}$$

dans le cas spécial orthogonal pair. Mais l'utilisation des familles paraboliques ci-dessus élimine cette différence. En effet, posons $I_j = \{j\}$ pour tout $j = 1, ..., t$. Si $(b_1, ..., b_t)$ est un exposant relatif au parabolique $P_{I_1,...,I_t}$, alors $(b_1, ..., b_{t-1}, -b_t)$ est un exposant relatif à $P_{I_1,...,I_{t-1},\check{I}_t}$. Si on impose les conditions (1) pour chacune des familles paraboliques, la condition (2) en résulte.

Dans certains raisonnements, par exemple la preuve du lemme 2.6, il convient de remplacer les paquets Π par les paquets plus grossiers $\bar{\Pi}$ définis en 2.1. Enfin, la première propriété de 2.7 n'est plus vraie. Il peut y avoir deux représentations π_1 et π_2 de $G(F)$ ayant un modèle de Whittaker d'un type fixé et vérifiant $Jord(\pi_1) = Jord(\pi_2)$. Mais alors $\pi_2 = \pi_1^w$ et cette unicité à conjugaison près par le groupe orthogonal tout entier suffit pour assurer la validité de nos raisonnements.

Avec ces adaptations, on vérifie que les résultats des paragraphes précédents et leurs preuves restent valables.

Remarque. On a présenté en 2.1 et admis la forme fine des conjectures. On peut se contenter d'un forme un peu plus faible où l'on ne paramètre plus que les paquets $\bar{\Pi}$, cf. [W1] 4.4 pour des énoncés précis. Nos raisonnements restent valables. L'intérêt de cette forme plus faible des conjectures est qu'elle est un résultat annoncé par Arthur, ainsi qu'on l'a dit dans l'introduction.

3 Preuve du théorème

Soient G et G' comme dans l'introduction. Rappelons le théorème principal que nous allons maintenant démontrer.

Théorème. *Soient $\varphi \in \Phi(G)$ et $\varphi' \in \Phi(G')$. On suppose φ et φ' génériques. Alors :*

(i) toutes les représentations induites dont les éléments de $\Pi^G(\varphi)$ et de $\Pi^{G'}(\varphi')$ sont les quotients de Langlands sont irréductibles ;

(ii) si $E(\varphi,\varphi') = -\mu(G,G')$, on a $m(\sigma,\sigma') = 0$ pour tous $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$;

(iii) si $E(\varphi,\varphi') = \mu(G,G')$, on a

$$m(\sigma(\varphi,\boldsymbol{\epsilon}),\sigma'(\varphi',\boldsymbol{\epsilon}')) = 1$$

et $m(\sigma,\sigma') = 0$ pour tous $\sigma \in \Pi^G(\varphi)$, $\sigma' \in \Pi^{G'}(\varphi')$ tels que $(\sigma,\sigma') \neq (\sigma(\varphi,\boldsymbol{\epsilon}),\sigma'(\varphi',\boldsymbol{\epsilon}'))$.

Preuve. Introduisons la forme quasi-déployée $\underline{G}$ de G. Il y a un Lévi

$$\underline{L} = GL(d_1) \times ... \times GL(d_m) \times \underline{G}_0$$

de $\underline{G}$, des représentations irréductibles tempérées σ_j de $GL(d_j,F)$ et des réels b_j pour $j = 1,...,m$, et un paramètre de Langlands tempéré $\varphi_0 \in \Phi(\underline{G}_0)$ de sorte que la suite $(b_1,...,b_m)$ soit strictement positive relativement à un sous-groupe parabolique de composante de Lévi $\underline{L}$ et que $\Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ soit l'ensemble des quotients de Langlands des induites

$$\sigma_1|.|_F^{b_1} \times ... \times \sigma_m|.|_F^{b_m} \times \pi_0 \quad (1)$$

pour $\pi_0 \in \Pi^{\underline{G}_0}(\varphi_0)$.

Remarque. Ici, on peut supposer et on suppose que groupe $\underline{G}_0$ n'est pas un groupe $SO(2)$ déployé : on peut remplacer un tel groupe par un facteur $GL(1)$.

Si $\underline{L}$ ne correspond à aucun Lévi de G (cela se produit quand $\underline{G}_0 = \{1\}$ et G n'est pas quasi-déployé), le paquet $\Pi^G(\varphi)$ est vide. Sinon, $\underline{L}$ correspond à un Lévi

$$L = GL(d_1) \times ... \times GL(d_m) \times G_0$$

de G et $\Pi^G(\varphi)$ est formé des quotients de Langlands des induites (1) pour $\pi_0 \in \Pi^{G_0}(\varphi_0)$.

Par hypothèse, il existe $\pi \in \Pi^{\underline{G}}(\varphi)$ qui admet un modèle de Whittaker d'un certain type. C'est le quotient de Langlands de l'induite (1) pour une représentation $\pi_0 \in \Pi^{\underline{G}_0}(\varphi_0)$ qui admet elle-aussi un modèle de Whittaker. D'après [Mu] thorme 1.1, le quotient de Langlands de l'induite admet un modèle de Whittaker si et seulement si l'induite est irréductible. Donc cette induite est irréductible. En appliquant le corollaire 2.14 au paquet $\Pi^{\underline{G}_0}(\varphi_0)$ et, quand il existe, au paquet $\Pi^{G_0}(\varphi_0)$, on voit que toutes les induites (1) sont irréductibles pour $\pi_0 \in \Pi^{\underline{G}_0}(\varphi_0)$ ou $\pi_0 \in \Pi^{G_0}(\varphi_0)$. Cela démontre l'assertion concernant $\Pi^G(\varphi)$ du (i) du théorème.

La même chose vaut du côté de G'. On introduit les objets similaires, auquels on ajoute des $'$. L'assertion concernant $\Pi^{G'}(\varphi')$ du (i) du théorème s'obtient comme cidessus. Supposons $E(\varphi,\varphi') = -\mu(G,G')$. Si l'un des paquets $\Pi^G(\varphi)$ ou $\Pi^{G'}(\varphi')$ est vide, l'assertion (ii) l'est aussi. Supposons ces deux paquets non vides, a fortiori, les Lévi L et L' existent. Soient $\epsilon \in \mathcal{E}^G(\varphi)$ et $\epsilon' \in \mathcal{E}^{G'}(\varphi')$. Alors $\sigma(\varphi,\epsilon)$ est l'induite (1) pour $\pi_0 = \sigma(\varphi_0,\epsilon)$. On a une assertion analogue pour $\sigma'(\varphi',\epsilon')$. D'après la proposition 1.3, on a

$$m(\sigma(\varphi,\epsilon),\sigma'(\varphi',\epsilon')) = m(\sigma(\varphi_0,\epsilon),\sigma'(\varphi'_0,\epsilon')). \quad (2)$$

On a $E(\varphi,\varphi') = E(\varphi_0,\varphi'_0)$ et $\mu(G,G') = \mu(G_0,G'_0)$, donc $E(\varphi_0,\varphi'_0) = -\mu(G_0,G'_0)$. D'après [W1] théorème 4.9, on a $m(\sigma(\varphi_0,\epsilon),\sigma'(\varphi'_0,\epsilon')) = 0$, d'où l'égalité cherchée $m(\sigma(\varphi,\epsilon),\sigma'(\varphi',\epsilon')) = 0$.

Supposons maintenant $E(\varphi,\varphi')=\mu(G,G')$. Montrons qu'alors, les Lévi L et L' existent bel et bien. Si ce n'est pas le cas, l'un des groupes G_0 ou G'_0 est réduit à $\{1\}$. Le paramètre φ_0 ou φ'_0 correspondant est vide et on a $E(\varphi,\varphi')=E(\varphi_0,\varphi'_0)=1$. Alors $\mu(G,G')=1$ et les deux groupes G et G' sont quasi-déployés. Donc les Lévi L et L' existent, contrairement à l'hypothèse. De plus, l'hypothèse $E(\varphi,\varphi')=\mu(G,G')$ entraîne que le couple $(\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon}')$ paramètre un élément du produit $\Pi^G(\varphi)\times\Pi^{G'}(\varphi')$. Ces paquets sont donc non vides. La preuve du (iii) du théorème est alors la même que celle de (ii) : pour $\epsilon\in\mathcal{E}^G(\varphi)$ et $\epsilon'\in\mathcal{E}^{G'}(\varphi')$, on a l'égalité (2) ; en appliquant le théorème 4.9 de [W1] au membre de droite de cette égalité, on obtient l'assertion cherchée. $\square$

Remarque. Supposons que F soit le complété d'un corps de nombres k en une place v de ce corps et que G soit la composante en cette place v d'un groupe spécial orthogonal $\mathbf{G}$ défini sur k. Notons $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de k. Considérons une représentation automorphe irréductible $\boldsymbol{\pi}$ de $\mathbf{G}(\mathbb{A})$ intervenant dans le spectre discret. Conjecturalement, il lui correspond une famille $(\boldsymbol{\pi}_i)_{i=1,\ldots,k}$ de représentations automorphes irréductibles de groupes linéaires intervenant dans le spectre discret. En notant d_i l'entier tel que $\boldsymbol{\pi}_i$ soit une représentation automorphe de $GL(d_i,\mathbb{A})$, on a $\hat{d}_G=\sum_{i=1,\ldots,k}d_i$. Ce résultat conjectural est annoncé par Arthur, sous les mêmes réserves que dans le cas local, cf. l'introduction. Supposons que toutes les $\boldsymbol{\pi}_i$ soient cuspidales. Notons $\pi=\boldsymbol{\pi}_v$ la composante de $\boldsymbol{\pi}$ en la place v. Alors π appartient à un paquet Π auquel on peut appliquer nos résultats, c'est-à-dire que c'est un paquet générique. Cela résulte de [M3] proposition 5.1.

Bibliographie

[AGRS] A. Aizenbud, D. Gourevitch, S. Rallis, G. Schiffmann : *Multiplicity one theorems*, prépublication 2007

[A1] J. Arthur : *An introduction to the trace formula*, Clay Math. Proc. 4 (2005), p.1-253

[A2] ——— : *A local trace formula*, Publ. Sc. IHES 73 (1991), p.5-96

[BZ] I. Bernstein, A. Zelevinsky : *Induced representations of reductive p-adic groups I*, Ann. Sc. ENS 10 (1977), p.441-472

[GGP] W. Gan, B. Gross, D. Prasad : Symplectic local root numbers, central critical L-values and restriction problems in the representation theory of classical groups, prépublication 2009

[K] T. Konno : *Twisted endoscopy implies the generic packet conjecture*, Israël J. of Math. 129 (2002), p.253-289

[M1] C. Moeglin : *Représentations quadratiques unipotentes des groupes classiques p-adiques*, Duke Math. J. 84 (1996), p.267-332

[M2] ——— : *Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques p-adiques : paramètres de Langlands et exhaustivité*, J. Eur. Math. Soc. 4 (2002), p.143-200

[M3] ——— : *Image des opérateurs d'entrelacements normalisés et pôles des séries d'Eisenstein*, prépublication 2009

[MW] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger : *Sur le transfert des traces d'un groupe classique p-adique à un groupe linéaire tordu*, Selecta math. 12 (2006), p.433-515

[Mu] G. Muic : *A proof of Casselman-Shahidi's conjecture for quasi-split classical groups*, Can. Math. Bull. 43 (2000), p.90-99

[W1] J.-L. Waldspurger : *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux*, prépublication 2009

[W2] ———————— : *Calcul d'une valeur d'un facteur ϵ par une formule intégrale*, prépublication 2009

[W3] ———————— : *Une formule intégrale reliée à la conjecture locale de Gross-Prasad, $2^{\grave{e}me}$ partie : extension aux représentations tempérées*, prépublication 2009

[Z] A. Zelevinsky : *Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of $GL(n)$*, Ann. Sc. ENS 13 (1980), p.165-210

CNRS Institut de mathématiques de Jussieu
175 rue du Chevaleret
75013 Paris
moeglin@math.jussieu.fr, waldspur@math.jussieu.fr